

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Pascal M A R O N I

Première thèse

LA RESOLUTION DU SYSTEME DE CHANDRASEHKAR

Deuxième thèse

INTRODUCTION A L'ETUDE DE LA FORME BI-CONFLUENTE
DE L'EQUATION DE HEUN

Soutenues le juin 1967 *, devant la Commission d'examen*

M. de POSSEL

Président

Mme DUBREIL-JACOTIN

M. DELANGE

} *Examineurs*

N° d'ordre

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Pascal M A R O N I

Première thèse

LA RESOLUTION DU SYSTEME DE CHANDRASEHKAR

Deuxième thèse

INTRODUCTION A L'ETUDE DE LA FORME BI-CONFLUENTE
DE L'EQUATION DE HEUN

Soutenues le juin 1967 *, devant la Commission d'examen*



M. de POSSEL

Président

Mme DUBREIL-JACOTIN

M. DELANGE

} Examinateurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549003_0047

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840.

| | | | | | | | |
|----------|---------|------|-------|-----|-------|-----|--------|
| Category | Address | City | State | Zip | Phone | Fax | E-mail |
| Address | Address | City | State | Zip | Phone | Fax | E-mail |

$$X(s) = 1 + s \int_0^1 \left(X(s) X(s') - Y(s) Y(s') \right) \frac{\Psi(s')}{s' + s} ds'$$
$$Y(s) = e^{-r/s} - s \int_0^1 \left(Y(s) X(s') - X(s) Y(s') \right) \frac{\Psi(s')}{s' - s} ds'$$
$$X_0(s) = J\left(0, \frac{1}{s}\right) \quad ; \quad Y_0(s) = J\left(r, \frac{1}{s}\right)$$
$$(2) \quad J(t, \sigma) = \int_0^r K(|t - \theta|) J(\theta, \sigma) d\theta + e^{-t\sigma}$$

avec
$$K(t) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \Psi\left(\frac{1}{x}\right) e^{-t x} dx, \quad t > 0$$

Toujours à l'aide de l'équation auxiliaire (2), Mullikin [2] a donné la solution générale du système (1). Récemment en utilisant la technique des équations intégrales à noyau de Cauchy - dans l'hypothèse où Ψ vérifie une condition de Lipschitz - il a montré que la résolution du système (1) se ramène à celle d'une équation de Fredholm [3].

Le but de ce travail est la résolution directe du système (1), c'est à dire sans aucune référence à l'équation (2).

La méthode utilisée permet de faire sur Ψ des hypothèses beaucoup plus générales que celles de Mullikin. L'idée de substituer au système (1) un système linéaire vérifié par la solutions de (1) est due à Fox [4], qui a traité le cas particulier où le système (1) se réduit à l'équation de Chandrasehkar : ($r = +\infty$)

$$(3) \quad \frac{1}{H(s)} = 1 - s \int_0^1 \frac{\Psi(s') H(s')}{s' + s} ds'$$

et il a montré que toute solution de (4) vérifie aussi l'équation :

$$(4) \quad \tau(s) H(s) - s \int_0^1 \frac{\Psi(s') H(s')}{s' - s} ds' = 1, \quad 0 < s < 1$$

$$\text{avec} \quad \tau(s) = 1 - 2s^2 \int_0^1 \frac{\Psi(s')}{s'^2 - s^2} ds', \quad 0 < s < 1,$$

les deux intégrales ci-dessus étant prises au sens de la valeur principale. Fox ne traite pas le problème de l'équivalence des équations (3) et (4), qui sera traité ici.

Nous avons repris l'idée de Fox dans le cas général, en étudiant le système linéaire d'équations non couplées :

$$(5) \quad \rho_\varepsilon(s) \tau(s) - s \Psi(s) \int_0^1 \frac{\rho_\varepsilon(s')}{s' - s} ds' = \Psi(s) \left\{ \begin{array}{l} 1 + \varepsilon e^{-r/s} \\ - \varepsilon s e^{-r/s} \int_0^1 \frac{\rho_\varepsilon(s')}{s' + s} ds' \end{array} \right\}$$

où on a posé :

$$\rho_{\varepsilon}(s) = \left(X(s) + \varepsilon Y(s) \right) \Psi(s) ; \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Le problème de l'équivalence des systèmes (1) et (5) est entièrement traité.

Nous faisons les hypothèses suivantes sur la fonction Ψ :

$$\Psi(s) \geq 0, \quad \Psi(s) \in L[0,1] \quad \text{et} \quad s \Psi(s) \in L_p[0,1], \quad p > 1.$$

De plus en ce qui concerne la régularité de l'opérateur au premier membre de (5), nous supposons qu'il existe $0 \leq p(s) \leq 1$ telle que :

$$\pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s) \geq p(s), \quad s \in [0,1]$$

et
$$\int_0^1 (p(s))^{-\frac{q}{2}} ds < +\infty$$

avec
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1.$$

La résolution de (5) et le traitement du problème de l'équivalence de (5) et (1) sont basés sur l'utilisation de certaines fonctions Φ holomorphes dans $\operatorname{Im} z > 0$ et appartenant à hp [5], c'est à dire telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x+iy)|^p dx \leq K, \quad \forall y > 0.$$

Ces fonctions vérifient, en particulier, la relation suivante - qui est fondamentale dans ce travail -

$$(6) \quad \Re \Phi(x+i0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Im \Phi(t+i0)}{t-x} dt, \quad p.p$$

Le principe de la méthode est le suivant : soit

$$(7) \quad \mathcal{L}_s \{\varphi\} = h(s), \quad 0 < s < 1$$

une équation à résoudre dans $L_p [0,1]$. On considère alors une fonction holomorphe convenable $\Phi(z; \sigma) \in h_p$ pour chaque $\sigma \in L_p [0,1]$ et telle que :

$$\Im \Phi(s+i0) = f(s; \mathcal{L}_s \{\sigma\}), \quad p.p \quad 0 < s < 1$$

$$\Im \Phi(s+i0) = 0, \quad s \in \mathbb{R} - [0,1]$$

D'après (6), on a ainsi pour toute solution φ dans $L_p [0,1]$ de (7) :

$$(8) \quad \Re \Phi(s+i0; \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t; h(t))}{t-s} dt, \quad p.p$$

Dans les cas favorables, il est possible d'obtenir des deux équations (7) et (8), la forme nécessaire (mais non suffisante en général) de toutes les solutions dans $L_p [0,1]$ de l'équation (7).

Ce principe trouve sa source dans les travaux de Carleman [6] M. Riesz [7] et a déjà été utilisé par Tricomi [8]. Nous l'étendons ici au cas des espaces $N_p [0,1]$, $p > 1$ (voir plus loin).

Le chapitre I est consacré à l'extension de certaines formules intégrales portant sur des fonctions holomorphes dans le demi-plan $\Im z > 0$. A l'aide d'une autre caractérisation des fonctions :

$$\Phi(z) = \int_a^b \frac{d\mu(s)}{s-z}, \quad \Im z > 0$$

où μ est bornée, non décroissante, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient engendrées par une mesure absolument continue. Ce résultat est essentiel pour la suite ; d'autre part, il justifie l'emploi que fait Tricomi de certaines fonctions holomorphes dans le travail cité.

Dans le chapitre II, nous étudions la résolution des équations suivantes :

$$\tau(s) \varphi(s) - s \Psi(s) \int_0^1 \frac{\varphi(s')}{s' - s} ds' = \Psi(s) h(s)$$

$$0 < s < 1$$

$$\tau(s) \chi(s) + s \Psi(s) \int_0^1 \frac{\chi(s')}{s' - s} ds' = s \Psi(s) g(s)$$

dans l'espace $N_p [0,1]$, $p > 1$ des fonctions f telles que $f(s) \in L[0,1]$ et $s(1-s) f(s) \in L_p [0,1]$.

Le chapitre III est réservé à la résolution du système (6) et au problème de l'équivalence des systèmes (1) et (6).

Nous retrouvons le résultat de Mullikin : toutes les solutions de (6) peuvent être obtenues à partir de la solution d'une équation de Fredholm dont l'opérateur est toujours une contraction. Mais la borne que nous donnons de la norme de cet opérateur est légèrement meilleure que celle fournie par cet auteur.

Lorsque le système homogène associé à (6) possède des solutions non nulles, nous montrons qu'il en possède une et une seule, soit $\beta_\varepsilon(s)$ telle que

$$\int_0^1 \frac{\beta_\varepsilon(s)}{s} ds = 1$$

$$X(s) = \frac{a}{2} s (U(s) - V(s)) + \frac{b}{2} s (U(s) + V(s)) + U(s)$$

$$Y(s) = \frac{a}{2} s (U(s) - V(s)) - \frac{b}{2} s (U(s) + V(s)) + V(s)$$

où a et b sont deux paramètres réels assujettis à vérifier $ab = K^2$ ($K^2 < 1$), K^2 dépendent de Ψ uniquement et où les fonctions U et V sont définies par :

$$U(s) \quad \Psi(s) = \frac{1}{2} \frac{\beta_+ (s) + \beta_- (s)}{s}$$

$$V(s) \quad \Psi(s) = \frac{1}{2} \frac{\beta_-(s) - \beta_+(s)}{s}$$

Le calcul numérique de U et V , pour une fonction Ψ donnée n'a pas été abordé. Il fera l'objet d'un prochain travail.

— : — : — : — : — : — : — : — : — : — :

Je suis heureux d'exprimer ici ma reconnaissance à Monsieur de POSSEL à qui je dois la possibilité d'avoir pu mener à terme ce travail.

Mes remerciements vont aussi à Madame DUBREIL-JACOTIN et à Monsieur DELANGE qui ont bien voulu participer au Jury.

Je remercie enfin le personnel du service de publications de l'INSTITUT
BLAISE PASCAL d'avoir assuré l'impression de cette thèse.

§ 1. Rappelons quelques faits de la théorie des fonctions holomorphes dans un demi-plan. On se placera toujours dans le demi plan supérieur $\text{Im } z > 0$. Soit $\Phi(z)$ holomorphe dans $\text{Im } z > 0$. La notation suivante :

$$\Phi(x + iy) \rightarrow \Phi(x + i0) \quad , \quad p.p. \\ y \rightarrow +0$$

signifie que la limite, lorsqu'elle existe, est atteinte suivant un chemin quelconque non tangentiel et cela pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

Théorème A^[9]. Soit $\Phi(z)$ holomorphe dans $\text{Im } z > 0$ et telle que :

- i) $\text{Im } \Phi(z) \geq 0$
- ii) $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} z \Phi(z) = k$ lorsque $|z| \rightarrow +\infty$

dans le secteur $\varepsilon \leq \arg z \leq \Pi - \varepsilon$ pour chaque $0 < \varepsilon < \frac{\Pi}{2}$. Alors $\exists \mu$ bornée sur $[-\infty, +\infty]$ et non décroissante telle que

$$(1.1.1.) \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s - z} \quad , \quad \text{Im } z > 0$$

De plus on a :

$$(1.1.2.) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(s) = -k$$

Remarque 1. Il est toujours possible de normaliser la fonction μ , par exemple en posant :

$$\mu(-\infty) = 0 \quad \text{et} \quad \mu(s) = \frac{1}{2} \left(\mu(s+0) + \mu(s-0) \right)$$

Dans ces conditions, la fonction μ du théorème A est unique et elle est donnée par :

$$(1.1.3.) \quad \mu(s) = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^s \operatorname{Im} \Phi(x + iy) dx$$

Remarque 2. D'après (1.1.2.), on doit avoir nécessairement :

$$k \leq 0$$

Lorsque $k = 0$, alors $\Phi(z) = 0$

Lemme 1.1. Soit Φ vérifiant les conditions du Théorème A. Alors
si $\operatorname{Im} \Phi(x + i0) \rightarrow \operatorname{Im} \Phi(x + i0)$ p.p
 $y \rightarrow +0$

on a : $\operatorname{Im} \Phi(x + i0) \in L(-\infty, +\infty)$

Car de (1.1.1.), on a :

$$\operatorname{Im} \Phi(x + iy) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y d\mu(s)}{(s-x)^2 + y^2}, \quad y > 0$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \Phi(x + iy) dx = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(s)$$

Le lemme de Fatou permet de conclure.

Corollaire : Pour que Φ vérifiant les conditions du Théorème A soit engendrée par une mesure absolument continue, il faut et il suffit que
 $\operatorname{Im} \Phi(x + iy) \rightarrow \operatorname{Im} \Phi(x + i0)$ presque partout et dans $L(-\infty, +\infty)$ fort.
 $y \rightarrow +0$

La condition est suffisante d'après (1.1.3.). Qu'elle soit nécessaire est un résultat classique [10].

Introduisons la transformation de Hilbert [10]:

$$(1.1.4.) \quad \mathcal{H}_s \{u\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(s')}{s' - s} ds' , \quad -\infty < s < +\infty$$

où l'intégrale est prise au sens de la valeur principale de Cauchy.

Définition [5] Notons h_p , $1 \leq p < +\infty$ l'ensemble des fonctions Φ holomorphes dans $\text{Im } z > 0$ et vérifiant la condition : $\exists k > 0$ (dépendant de Φ et de p seulement) tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x+iy)|^p dx < k, \quad \forall y > 0$$

Théorème B [5][10] Soit $\Phi \in h_p$. Alors Φ vérifie les propriétés suivantes:

i) $\Phi(x+iy) \rightarrow \Phi(x+i0)$ p.p et dans $L_p(-\infty, +\infty)$ fort
 $y \rightarrow +0$

$$ii) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t+i0)}{t-z} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t+i0) y}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

et aussi
$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } \Phi(t+i0)}{t-z} dt$$

iii) $R \Phi(x+i0) = \mathcal{H}_x \{ \text{Im } \Phi(t+i0) \}$, p.p
 (1.1.5.)

$$iv) \quad \Phi(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t+iy_0) (y-y_0)}{(t-x)^2 + (y-y_0)^2} dt$$

(1.1.6.)

pour tout couple $y > y_0 > 0$

Remarque : La représentation (1.1.6.) entraîne [5] que toute $\Phi \in hp$ tend vers zéro lorsque $|z| \rightarrow +\infty$ uniformément $\forall y \geq \varepsilon > 0$ pour chaque $\varepsilon > 0$.

Notre point de départ sera la généralisation de (1.1.6.) à des classes de fonctions holomorphes plus générales que hp .

§ 2. *Définition* Lorsque $\Phi(z) \rightarrow 0$, $|z| \rightarrow +\infty$, uniformément $\forall y \geq \varepsilon > 0$ pour chaque $\varepsilon > 0$, nous dirons que Φ tend vers zéro normalement lorsque $|z| \rightarrow +\infty$.

Lemme 1.2. Soit $\Phi(z)$ holomorphe dans $\text{Im } z > 0$ et telle que $\Phi(z) \rightarrow 0$ normalement lorsque $|z| \rightarrow +\infty$. Alors pour tout couple $y > y_0 > 0$, on a :

$$(1.2.1.) \quad \Phi(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t+iy_0) (y - y_0)}{(t-x)^2 + (y - y_0)^2} dt$$

et

$$(1.2.2.) \quad \Phi(x+iy) = \frac{1}{i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{(t-x) \Phi(t+iy_0)}{(t-x)^2 + (y - y_0)^2} dt$$

Soit γ le demi cercle centré en $(0, y_0)$, $y_0 > 0$ et de rayon R . Une simple application du théorème de Cauchy fournit :

$$2i\pi \Phi(x+iy) = \int_{-R}^{+R} \frac{\Phi(t+iy_0)}{t+iy_0 - z} dt + \int_{\gamma} \frac{\Phi(u)}{u - z} du$$

pour $|z - y_0| < R$, $y > y_0$

Mais puisque $\Phi(z) \rightarrow 0$ normalement, $\left| \int_{\gamma} \right| \rightarrow 0$ $R \rightarrow +\infty$

Donc

$$(1.2.3.) \quad \Phi(x+iy) = \frac{1}{2i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t+iy_0)}{t+iy_0 - z} dt, \quad y > y_0$$

Pour $z' = x + i y'$ avec $0 < y' < y_0$, on obtient :

$$(1.2.4.) \quad 0 = \frac{1}{2i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t + iy_0)}{t + iy_0 - z'} dt$$

En particulier, [5] pour $z' = x + i(2y_0 - y)$, $y > y_0$, on a en retranchant (1.2.4.) de (1.2.3.) :

$$\begin{aligned} 2i\pi \Phi(x + iy) &= P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t + iy_0) (z - \bar{z} - 2iy_0)}{[t - x + i(y_0 - y)][t - x - i(y_0 - y)]} dt \\ &= 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t + iy_0) (y - y_0)}{(t - x)^2 + (y - y_0)^2} dt \end{aligned}$$

c'est à dire (1.2.1.) et en ajoutant membre à membre (1.2.3.) et (1.2.4.), on obtient (1.2.2.).

Corollaire Soit $\Phi(z)$ holomorphe dans $\text{Im } z > 0$ et vérifiant l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

- a) $\Phi(z) \rightarrow k$, normalement lorsque $|z| \rightarrow +\infty$
- b) $|\Phi(z)| \leq M\varepsilon \quad \forall y \geq \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\Phi(t + iy)}{t + iy} dt \quad \text{existe pour chaque } y > 0$$

Alors Φ vérifie la relation (1.2.1.).

Dans le cas a) $\Phi(z) = k$ vérifie les conditions du lemme 1.2., donc on a :

$$\Phi(x + iy) - k = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\Phi(t + iy_0) - k)(y - y_0)}{(t - x)^2 + (y - y_0)^2} dt$$

$$\text{Mais } \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y - y_0}{(t - x)^2 + (y - y_0)^2} dt = 1$$

d'où (1.2.1.).

Dans le cas b), la fonction $\frac{\Phi(z)}{z}$ vérifie les conditions du

Lemme 1.2., donc vérifie les relations (1.2.3.) et (1.2.4.) qui s'écrivent aussi, en vertu de l'hypothèse :

$$2 i \Pi (x + i y) = - P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t + i y_0)}{t + i y_0} dt + P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t + i y_0)}{t + i y_0 - z} dt$$

$$y > y_0$$

$$0 = - \frac{1}{2 i \Pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t + i y_0)}{t + i y_0} dt + \frac{1}{2 i \Pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t + i y_0)}{t + i y_0 - z'} dt$$

$$0 < y' < y_0$$

En retranchant membre à membre, on retrouve bien (1.2.1.)

Remarque 1. On pourrait écrire ce que devient la relation (1.2.2.) dans les hypothèses a) et b) du corollaire : ce n'est pas utile pour la suite.

Remarque 2. Le corollaire précédent permet de démontrer très simplement $\Phi \in hp$ vérifie (1.2.1.). En effet, dans ce cas, l'hypothèse b) est satisfaite, puisque, d'après [11] une fonction de hp est bornée dans tout demi-plan $y \geq \varepsilon > 0$.

Remarque 3. La relation (1.2.1.) n'est pas autre chose que la représentation de Poisson de la fonction Φ relativement au demi-plan $y > y_0$.

Lemme 1.3. La fonction holomorphe suivante :

$$(1.2.5.) \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s - z}, \quad \text{Im } z > 0$$

μ est a variation bornée telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(s)| < +\infty$$

admet une représentation de Poisson relativement au demi-plan $y > y_0 > 0$.

Montrons que la fonction (1.2.5.) vérifie l'hypothèse b) du corollaire du lemme 1.2. Soit $y \geq \varepsilon > 0$.

On a :

$$R \Phi(x + i y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(s-x) d\mu(s)}{(s-x)^2 + y^2}$$

$$Im \Phi(x + i y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y d\mu(s)}{(s-x)^2 + y^2}$$

d'où

$$|R \Phi(x + i y)| \leq \frac{1}{2 y} \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(s)| \leq \frac{1}{2 \varepsilon} M$$

$$|Im \Phi(x + i y)| \leq \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{+\infty} |d\mu(s)| \leq \frac{1}{\varepsilon} M$$

D'autre part, considérons :

$$\int_{-R}^R \frac{\Phi(x + i y)}{x + i y} dx = \int_{-R}^R \frac{dx}{x + i y} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s - x - i y} = J_1 + J_2$$

avec $J_1 = \int_{-R}^R \frac{dx}{x + i y} \int_{-A}^{+A} \frac{d\mu(s)}{s - x - i y}, \quad A > 0$

$$J_2 = \int_{-R}^R \frac{dx}{x + i y} \left\{ \int_{-\infty}^{+A} + \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s - x - i y} \right\} = J'_2 + J''_2$$

Le paramètre A étant fixé, l'intégrale J_1 converge absolument lorsque $R \rightarrow +\infty$, puisque :

$$\int_{-A}^{+A} \frac{d\mu(s)}{s - x - iy} \leq \int_{-A}^{+A} \frac{|d\mu(s)|}{[(s-x)^2 + y^2]^{1/2}} = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad |x| \rightarrow +\infty$$

et cela pour chaque $y > 0$.

Pour J''_2 , on a :

$$J''_2 = \int_{-R}^{+R} dx \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{(x+iy)(s-x-iy)} = \int_{-R}^{+R} dx \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s} \left(\frac{1}{x+iy} + \frac{1}{s-x-iy} \right)$$

$$J''_2 = \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{x+iy} + \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{s-x-iy}$$

$$= - \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s} \int_0^R \frac{2iy dx}{x^2 + y^2} + \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s} \int_0^R \frac{2(s-iy) dx}{(s+x-iy)(s-x-iy)}$$

$$\begin{aligned} \text{Mais } \left| \frac{1}{s} \int_0^R \frac{2(s-iy)}{(s+x-iy)(s-x-iy)} dx \right| &\leq 2 \frac{(s^2 + y^2)^{1/2}}{|s|} \int_0^R \frac{dx}{[(s+x)^2 + y^2]^{1/2}} \\ &\quad [(s-x)^2 + y^2]^{1/2} \\ &\leq 2 \left(1 + \frac{y^2}{A^2} \right)^{1/2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{[(s+x)^2 + y^2]^{1/2} [(s-x)^2 + y^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

pour $s \geq A$. Il en résulte que J''_2 converge vers une limite finie bien déterminée lorsque $R \rightarrow +\infty$ pour chaque $y > 0$. De même pour J'_2 . Comme conséquence immédiate du lemme 1.2., on a le théorème :

Théorème 1.1. Soit $\Phi(z)$ holomorphe dans $\text{Im } z > 0$ et $\Phi(z) \rightarrow 0$ normalement lorsque $|z| \rightarrow +\infty$

a) Si $\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{Im } \Phi(x+iy)|^p dx \leq k, \quad \forall y > 0$

avec $1 < p < +\infty$, alors $\Phi \in hp$.

b) Si $|Im \Phi(x+iy)| \leq k$, $\forall y > 0$, $\forall x \in R$
 et $Im \Phi(x+iy) \rightarrow Im \Phi(x+i0) \in L(-\infty, +\infty)$
 $y \rightarrow +0$

alors $Im \Phi$ converge dans $L(-\infty, +\infty)$ fort lorsque $y \rightarrow +0$.

Démontrons le point a). D'après (1.2.2.), on a :

$$R \Phi(x+iy) = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{(t-x) Im \Phi(t+iy)}{(t-x)^2 + (y-y)^2} dt$$

pour $y > y_0 > 0$. Ici l'intégrale converge absolument d'après l'hypothèse.
 De plus, lorsque $y \rightarrow y_0 + 0$, on a :

$$R \Phi(x+iy_0) = \mathcal{H}_x \left\{ Im \Phi(t+iy_0) \right\}$$

pour tout $x \in R$; la transformation de Hilbert étant bornée dans
 $L_p(-\infty, +\infty)$ pour $1 < p < +\infty$, le résultat est évident.

Pour le point b), d'après (1.2.1.), on a :

$$Im \Phi(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im \Phi(t+iy_0)(y-y_0)}{(t-x)^2 + (y-y_0)^2} dt$$

Pour $0 < y_0 \leq y/2$, $y > 0$, on a :

$$\frac{Im \Phi(t+iy_0)(y-y_0)}{(t-x)^2 + (y-y_0)^2} \leq \frac{y K}{(t-x)^2 + y^2/4} \in L(-\infty, +\infty)$$

d'où d'après Lebesgue :

$$Im \Phi(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im \Phi(t+i0)y}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

et la propriété annoncée en découle d'après [10].

§ 3. Définitions : Désignons par P l'ensemble des fonctions holomorphes Φ vérifiant les conditions i) et ii) du théorème 1.

Soit $PL \subset P$ l'ensemble des fonctions Φ de P telles que

$$\Phi(x+iy) \rightarrow \Phi(x+i0), \quad p.p \\ y \rightarrow +0$$

(voir appendice)

Enfin soit $PN \subset P$ l'ensemble des fonctions Φ de P telles que $s\Phi(s) \rightarrow k$ normalement lorsque $|s| \rightarrow +\infty$.

D'autre part, notons par T l'ensemble des fonctions τ réelles, définies presque partout et mesurables sur R telles que :

$$a) \quad \tau \in L(-\infty, +\infty)$$

$$b) \quad 0 \leq \tau(s) \leq \pi$$

Théorème 1.2. Il existe une bijection α de PL sur T telle que :

$$\alpha(\Phi) = \tau(s) = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} \Phi(s+i0)}{1 + \operatorname{Re} \Phi(s+i0)} \right), \quad p.p \\ [0, \pi]$$

$$(1.3.1.) \quad \alpha^{-1}(\tau) = \Phi(s) = e^{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(s)}{s-s} ds} - 1, \quad \operatorname{Im} s > 0$$

Soit $\tau \in T$; montrons que $\Phi(s)$ défini par (1.3.1.) appartient à PL . On a :

$$\Phi(x+iy) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(s-x) \tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds + i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds \right\} - 1$$

d'où

$$\operatorname{Re} \Phi(x+iy) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(s-x) \tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds \right\} \cos \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds \right) - 1$$

(1.3.2.)

$$\operatorname{Im} \Phi(x+iy) = \exp. \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(s-x) \tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds \quad \sin. \left(\frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds \right)$$

Pour $\tau(s) \neq 0$ p.p., on a bien $\operatorname{Im} \Phi(x+iy) > 0$ pour $y > 0$, car

$$0 < \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds < \Pi, \quad y > 0$$

En effet si l'intégrale était nulle pour $y > 0$, on aurait $\tau(s) = 0$ p.p d'après l'hypothèse b) et si elle était égale à Π pour $y > 0$, on aurait :

$$\frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\Pi - \tau(s)) y}{(s-x)^2 + y^2} ds = 0$$

c'est à dire d'après b) $\tau(s) = \Pi$ p.p ce qui contredirait l'hypothèse a).

Ensuite d'après (1.3.2.), on a :

$$\begin{aligned} R \Phi(x+i0) &= e^{\mathcal{H}_x \{\tau\}} \cos. \tau(x) - 1 \\ (1.3.3.) \quad \operatorname{Im} (x+i0) &= e^{\mathcal{H}_x \{\tau\}} \sin \tau(x) \end{aligned}, \quad \text{p.p.}$$

où d'ailleurs, d'après le lemme 1.1., $\operatorname{Im} \Phi(x+i0) \in L(-\infty, +\infty)$.

D'autre part de (1.3.1.) :

$$\Phi(z) = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(s)}{s-z} ds + O \left(\frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(s)}{s-z} ds \right)^2$$

lorsque $|z| \rightarrow +\infty$ dans le secteur $\varepsilon \leq \arg z \leq \Pi - \varepsilon$ avec

$$0 < \varepsilon < \frac{\Pi}{2} . \text{ De}$$

$$\left| \frac{s}{s-z} \right| \leq \left| \frac{1}{\sin \varepsilon} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{z}{s-z} \right| \leq \left| \frac{1}{\sin \varepsilon} \right|$$

dans ce secteur on a :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(s)}{s-z} ds \right| \leq \left| \frac{1}{|z|} \right| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{z}{s-z} \right| \tau(s) ds$$

$$\leq \frac{\tau_0}{\sin \varepsilon |z|}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{s-z} \tau(s) ds \right| \leq \left| \int_{-A}^{+A} \frac{s}{s-z} \tau(s) ds \right| + \int_{|s| \geq A} \left| \frac{s}{s-z} \right| \tau(s) ds$$

$$\leq \frac{1}{|z|} \int_{-A}^{+A} \left| \frac{z}{s-z} \right| |s| \tau(s) ds + \frac{1}{\sin \varepsilon} \int_{|s| \geq A} \tau(s) ds$$

$$= o(1) \text{ lorsque } |z| \rightarrow +\infty$$

Il en résulte :

$$z \Phi(z) = - \frac{\tau_0}{\Pi} + o(1)$$

lorsque $|z| \rightarrow +\infty$ dans le secteur envisagé. On a bien $\Phi \in PL$.

Si μ est la fonction associée à Φ par le théorème 4, on a la relation :

$$(1.3.4.) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(s) = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(s) ds$$

Cette application de T dans PL est injective, car si $\tau_1, \tau_2 \in T$ définissaient la même fonction Φ , on aurait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_1(s)}{s-z} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau_2(s)}{s-z} ds$$

c'est à dire

$$\tau_1(s) = \tau_2(s) \quad p.p$$

Réciproquement soit $\Phi(z) \in PL$. Si $\Phi(z) \not\equiv 0$ identiquement alors $\text{Im } \Phi(z) > 0$ dans $\text{Im } z > 0$. Considérons la fonction suivante :

$$(1.3.5.) \quad \hat{\Phi}(z) = \log(1 + \Phi(z))$$

où on a pris la branche principale du logarithme définie dans la région principale $z + |z| \neq 0$. Montrons que $\hat{\Phi} \in PL$. D'abord $\hat{\Phi}$ est holomorphe dans $\text{Im } z > 0$ car $w = 1 + \Phi(z)$ et dans $\text{Im } w > 0$ puisque $\text{Im } \Phi > 0$. Il en résulte que

$$(1.3.6.) \quad 0 < \text{Im } \hat{\Phi}(z) = \arg(1 + \Phi(z)) < \Pi$$

et on peut poser

$$(1.3.7.) \quad \text{Im } \hat{\Phi}(z) = \arctan g \left(\frac{\text{Im } \Phi(z)}{1 + \text{Re } \Phi(z)} \right) \quad [0, \Pi]$$

De (1.3.5.), on a :

$$z \hat{\Phi}(z) = z \Phi(z) + O(z \Phi^2(z)) \quad , \quad |z| \rightarrow +\infty$$

donc $\hat{\Phi}(z) \rightarrow k$ dans le secteur $\varepsilon \leq \arg z \leq \Pi - \varepsilon$. D'après le théorème A, $\exists \hat{\mu}$ bornée, non décroissant telle que

$$\hat{\Phi}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{\mu}(s)}{s - z}$$

Utilisons maintenant le fait que $\hat{\Phi}(x+iy) \rightarrow \hat{\Phi}(x+i0)$ p.p. De (1.3.7.) on a :

$$(1.3.8.) \quad \operatorname{Im} \hat{\Phi}(x+iy) \xrightarrow{y \rightarrow +0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{Im} \hat{\Phi}(x+i0)}{1 + R \hat{\Phi}(x+i0)} \right) = \tau(x) \text{ p.p. } [0, \Pi]$$

et d'après le lemme 1.1., $\tau \in L(-\infty, +\infty)$

Mais (1.3.6.) montre, d'après le théorème 1.1. b) que $\operatorname{Im} \hat{\Phi}(x+iy) \rightarrow \tau(x)$ dans $L(-\infty, +\infty)$ fort, ce qui prouve, d'après le corollaire du lemme 1.1., que la fonction $\hat{\mu}$ est absolument continue, d'où :

$$(1.3.9.) \quad \hat{\Phi}(z) = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(s)}{s - z} ds$$

avec $0 \leq \tau(s) \leq \Pi$. Il en résulte bien (1.3.1.)

Remarque 1. Il existe une autre bijection du T sur PL , celle définie par :

$$(1.3.10.) \quad \Phi(z) = 1 - e^{-\frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(s)}{s - z} ds}$$

où ici :

$$\tau(s) = \operatorname{arc} \operatorname{tg}_{[0, \Pi]} \left(\frac{\operatorname{Im} \Phi(s+i0)}{1 - R \Phi(s+i0)} \right), \text{ p.p.}$$

Remarque 2. De (1.3.3.), on a :

$$e^{2\Re\{\gamma\}} = (1 + R \Phi(x+i0))^2 + (\operatorname{Im} \Phi(x+i0))^2$$

d'où

$$\Re_x \{ \tau \} = \frac{1}{2} \log \left((1 + R \Phi(x+i0))^2 + (\operatorname{Im} \Phi(x+i0))^2 \right), \quad p.p.$$

Lemme 1.4. Soit $\Phi \in PN$. Alors :

$$\operatorname{Im} \Phi(x+iy) \rightarrow \operatorname{Im} \Phi(x+i0) \quad , \quad p.p. \\ y \rightarrow +0$$

Considérons la fonction holomorphe suivante :

$$\hat{\Phi}(z) = e^{i \Phi(z)} \quad , \quad \operatorname{Im} z > 0$$

On a :

$$|\hat{\Phi}(z)| = e^{-\operatorname{Im} \Phi(z)} \leq 1.$$

Donc [10]

$$\hat{\Phi}(x+iy) \rightarrow \hat{\Phi}(x+i0) \quad p.p. \\ y \rightarrow +0$$

Montrons que la fonction limite $\hat{\Phi}(x+i0)$ ne peut pas être nulle presque partout. Car $\hat{\Phi}(z) \rightarrow 1$ normalement lorsque $|z| \rightarrow +\infty$ et ainsi vérifie (1.2.1.)

$$\hat{\Phi}(x+iy) = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\Phi}(t+iy_0)(y-y_0)}{(t-x)^2 + (y-y_0)^2} dt$$

D'après Lebesgue, lorsque $y_0 \rightarrow +0$, on a :

$$\hat{\Phi}(x+iy) = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\Phi}(t+i0)y}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

Si $\hat{\Phi}(t+i0) = 0$ p.p., alors $\hat{\Phi}(x+iy) = 0$ $y > 0$ donc $\operatorname{Im} \Phi(x+iy) = +\infty$ $\forall x \in R$ et $\forall y > 0$.

Donc $\hat{\Phi}(t+i0) \neq 0$ p.p. et $\hat{\Phi}(t+i0)$ est p.p. finie.

Il en résulte que :

$$\operatorname{Im} \Phi(x + iy) = - \log |\hat{\Phi}(x + iy)|$$

converge p.p vers une fonction limite lorsque $y \rightarrow +0$

Théorème 1.3. On a $PN \subset PL$

Considérons la fonction (1.3.5.) associée à $\Phi \in PN$. Elle est aussi dans PN . D'après le lemme précédent sa partie imaginaire définie par (1.3.7.) converge p.p vers $\operatorname{Im} \hat{\Phi}(x+i0) = \tau(s)$ lorsque $y \rightarrow +0$, d'où, d'après la suite du raisonnement du théorème 1.2., la représentation (1.3.1.) pour Φ .

Soit $\tilde{P}$ l'ensemble des $\Phi \in P$ telles que μ soit constante hors d'un compact.

Soit $\tilde{T}$ l'ensemble des éléments $\tau \in T$ nuls presque partout hors d'un compact.

Théorème 1.4. La restriction de α à $\tilde{P}$ est une bijection de $\tilde{P}$ sur $\tilde{T}$.

Soit $\Phi \in \tilde{P}$. Alors $\exists$ a et b finis tels que

$$\Phi(z) = \int_a^b \frac{d\mu(s)}{s-z}, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

Visiblement $\Phi \in PN$. D'après le théorème 1.3., $\exists$ $\tau \in T$ unique telle que :

$$\tau(s) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{Im} \Phi(s+i0)}{1 + R\Phi(s+i0)} \right), \quad \text{p.p.} \\ [0, \Pi]$$

Mais $\operatorname{Im} \Phi(s+i0) = 0$ pour $s \notin [a, b]$, $R\Phi(s+i0) \geq 0$ pour $s < a$ et $\exists$ $b' \geq b$ tel que pour $s > b'$

$$1 + R\Phi(s+i0) \geq 0.$$

Donc $\tau(s) = 0$ pour $s \notin [a, b']$, ce qui veut dire que $\tau \in \tilde{T}$.

Réciproquement soit $\tau \in \tilde{T}$; alors $\exists$ a et b finis tels que $\tau(s) = 0$ p.p pour $s \notin [a, b]$. Il s'agit de montrer que la fonction suivante :

$$(1.3.11.) \quad \Phi(z) = e^{-\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\tau(s)}{s-z} ds} \quad -1, \quad \text{Im } z > 0$$

est dans $\tilde{P}$. Montrons que $\text{Im } \Phi(x+iy) \rightarrow 0$ dans $L(-\infty, a-\varepsilon)$ fort et $y \rightarrow +0$ dans $L(b+\varepsilon, +\infty)$ fort pour chaque $\varepsilon > 0$. Il en résultera :

$$\Phi(z) = \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \frac{d\mu(s)}{s-z}, \quad \text{Im } z > 0$$

pour chaque $\varepsilon > 0$ et même lorsque $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\Phi(z) = \int_a^b \frac{d\mu(s)}{s-z}, \quad \text{Im } z > 0.$$

Or pour $x \leq a - \varepsilon$ ou $x \geq b + \varepsilon$, on a :

$$e^{-\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{(s-x)\tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds} \leq M \quad \forall y > 0$$

où $M = e^{-\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\tau(s)}{s-a+\varepsilon} ds}$ dans le premier cas et $M = 1$ dans le second.
D'où, d'après la seconde relation (1.3.2.) et si $E = (-\infty, a-\varepsilon) \cup (b+\varepsilon, +\infty)$

$$\int_E \text{Im } \Phi(x+iy) dx \leq M \int_E \left(\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\tau(s) y}{(s-x)^2 + y^2} ds \right) dx$$

et le second membre tend vers zéro lorsque $y \rightarrow +0$, d'après le théorème 1.2.

§ 4. A chaque $\Phi \in PL$, faisons correspondre l'ensemble des $\Phi_{\theta}^+ \in PL$ telles que :

$$(1.4.1.) \quad \Phi_{\theta}^+(z) = e^{-\frac{1}{\Pi} \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(s)}{s-z} ds} - 1, \quad \text{Im } z > 0$$

pour chaque $0 < \theta < 1$. Par définition $\Phi_{1-0}^+(z) = \Phi(z)$.

A partir de la représentation (1.3.10.), on peut également associer à Φ la famille suivante :

$$(1.4.2.) \quad \Phi_{\theta}^{\sim}(z) = 1 - e^{-\frac{1}{\Pi} \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(s)}{s-z} ds}, \quad \text{Im } z > 0$$

où $0 < \theta < 1$. Nous verrons qu'il est indifférent d'utiliser l'une ou l'autre de ces familles de fonctions.

Lemme 1.5. Si pour chaque $0 < \theta < 1$, la fonction $\Phi_{\theta}^+(z)$ est engendrée par une mesure absolument continue et si $\exists 0 < \varepsilon < \Pi$ tel que $0 \leq \tau(s) \leq \Pi - \varepsilon$, alors Φ est aussi engendrée par une mesure absolument continue.

Il suffit de montrer que $\text{Im } \Phi_{\theta}^+(x+i0) \rightarrow \text{Im } \Phi(x+i0)$ dans $L(-\infty, +\infty)$ $\theta \rightarrow 1-0$

fort. Car alors de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } \Phi_{\theta}^+(x+iy) dx = \theta \frac{\tau_0}{\Pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } \Phi_{\theta}^+(x+i0) dx \quad 0 < \theta < 1.$$

on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } \Phi(x+iy) dx &= \frac{\tau_0}{\Pi} = \lim_{\theta \rightarrow 1-0} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } \Phi_{\theta}^+(x+i0) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } \Phi(x+i0) dx \end{aligned}$$

Or de la seconde relation (1.3.3.) où $\tau(s) \rightarrow \theta \tau(s)$, on a :

$$\operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+i0) = e^{\theta \mathcal{H}_x\{\tau\}} \sin \theta \tau(x) \quad , \quad p.p$$

Soit
$$A = \left\{ x \in R \ ; \ \mathcal{H}_x\{\tau\} > 0 \right\}$$

Alors pour une partie E mesurable quelconque, on a :

$$\int_E \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+i0) \, dx = \int_{E \cap A} + \int_{E \cap (R-A)}$$

et
$$\begin{aligned} \int_{E \cap (R-A)} \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+i0) \, dx &\leq \int_{E \cap (R-A)} \sin \theta \tau(x) \, dx \\ &\leq \int_E \sin \theta \tau(x) \, dx \leq \int_E \tau(x) \, dx \end{aligned}$$

$$\int_{E \cap A} \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+i0) \, dx \leq \int_{E \cap A} e^{\mathcal{H}_x\{\tau\}} \frac{\sin \theta \tau(x)}{\sin \tau(x)} \sin \tau(x) \, dx$$

Puisque $0 \leq \tau(x) \leq \Pi - \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < \Pi$, $\exists M_{\varepsilon}$ indépendant de x et de θ tel que

$$\frac{\sin \theta \tau(x)}{\sin \tau(x)} \leq M_{\varepsilon} \quad , \quad \forall x \in R$$

Donc

$$\int_{E \cap A} \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+i0) \, dx \leq M \int_E \operatorname{Im} \Phi(x+i0) \, dx$$

En définitive :

$$\int_E \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+i0) dx \leq \int_E \tau(x) dx + M \int_E \operatorname{Im} \Phi(x+i0) dx$$

Si : $E = (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$, $R > 0$, alors lorsque $R \rightarrow +\infty$:

$$\int_{|x| \geq R} \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+i0) dx \rightarrow 0 \quad \text{uniformément} \quad \forall 0 < \theta < 1 \text{ et}$$

lorsque $\operatorname{Mes}(E) \rightarrow 0$: (pour E mesurable quelconque)

$$\int_E \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+i0) dx \rightarrow 0 \quad \text{uniformément} \quad \forall 0 < \theta < 1. \text{ On a}$$

bien la propriété voulue .

Lemme 1.6. Soit $\Phi \in \tilde{P}$ et telle qu'il existe $0 < \varepsilon < \pi$ pour lequel $0 \leq \tau(s) \leq \pi - \varepsilon$. Alors pour chaque $0 < \theta < 1$, la fonction $\Phi_{\theta}^+(z)$ est engendrée par une mesure absolument continue .

La fonction Φ admet la représentation (1.3.11.). Montrons que :

$$(1.4.3.) \quad \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+iy) = e^{\frac{1}{\pi} \theta} \int_a^b \frac{(s-x) \tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds \quad \sin \left(\frac{1}{\pi} \theta \int_a^b \frac{y \tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds \right)$$

converge dans $L(-\infty, +\infty)$ fort pour chaque $0 < \theta < 1$ lorsque $y \rightarrow +0$.

D'après la seconde partie du théorème 1.4. on a :

$$\int_{|x| \geq R} \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+iy) dx \rightarrow 0$$

lorsque $R \rightarrow +\infty$ et cela uniformément $\forall y > 0$, pour chaque $0 < \theta < 1$.

Il reste donc à vérifier que , pour toute partie mesurable E telle que $\operatorname{Mes}(E) \rightarrow 0$ on a :

$$\int_E \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+iy) dx \rightarrow 0$$

uniformément $\forall y > 0$, pour chaque $0 < \theta < 1$.

Posons, pour simplifier :

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{(s-x) \tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds; \quad v(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{y \tau(s)}{(s-x)^2 + y^2} ds$$

Partons de l'identité suivante, valable pour tout $w \in \mathbb{R}$:

$$e^{w\xi} = 1 + w \int_0^1 e^{w\xi} d\xi$$

En particulier, pour $w = \theta u(x,y)$, on a :

$$e^{\theta u(x,y)} \sin(\theta v(x,y)) = \sin(\theta v(x,y)) + \theta u(x,y) \sin(\theta v(x,y))$$

$$\int_0^1 e^{\theta u(x,y) \xi} d\xi$$

après avoir multiplié les deux membres par $\sin(\theta v(x,y))$; compte tenu de (1.4.3.), cette égalité s'écrit :

$$\operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+iy) = \sin(\theta v(x,y)) + \theta u(x,y) \int_0^1 \frac{\sin(\theta v(x,y))}{\sin v(x,y)} (\operatorname{Im} \Phi(x+iy))^{\theta \xi} d\xi$$

Mais de l'hypothèse faite sur τ , on déduit $0 < v(x,y) \leq \pi - \varepsilon$, de sorte qu'il existe $M_{\varepsilon}(\theta)$ tel que :

$$\frac{\sin \theta v(x,y)}{(\sin v(x,y))^{\theta \xi}} \leq M_{\varepsilon}(\theta)$$

Donc pour un ensemble E mesurable quelconque, de mesure finie, on a :

$$\int_E \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+iy) dx \leq \operatorname{Mes}(E) + M_{\varepsilon}(\theta) \theta \int_E |u(x,y)| dx \int_0^1 (\operatorname{Im} \Phi(x+iy))^{\theta \xi} d\xi$$

$$(1.4.4.) \leq \operatorname{Mes}(E) + \theta M_{\varepsilon}(\theta) \int_0^1 d\xi \int_E |u(x,y)| (\operatorname{Im} \Phi(x+iy))^{\theta \xi} dx$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a pour $0 < \xi \leq 1$:

$$\int_E |u(x,y)| (\operatorname{Im} \Phi(x+iy))^{\theta \xi} dx \leq \left(\int_E |u(x,y)|^{1-\theta \xi} dx \right)^{1-\theta \xi} \left(\int_E \operatorname{Im} \Phi(x+iy) dx \right)^{\theta \xi}$$

$$\text{Mais } \int_E \operatorname{Im} \Phi(x+iy) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \Phi(x+iy) dx = C = \text{const.}$$

$$\text{et de } \frac{1}{1-\theta \xi} \leq \frac{1}{1-\theta}, \text{ on a :}$$

$$\left(\int_E |u(x,y)|^{\frac{1}{1-\theta \xi}} dx \right)^{1-\theta \xi} \leq (\operatorname{Mes}(E))^{\theta(1-\xi)} \left(\int_E |u(x,y)|^{\frac{1}{1-\theta}} dx \right)^{1-\theta}$$

de sorte que l'inégalité (1.4.4.) devient ;

$$\int_E \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+iy) dx \leq \operatorname{Mes}(E) + M_{\varepsilon}(\theta) \theta \int_0^1 C^{\theta \xi} (\operatorname{Mes}(E))^{\theta(1-\xi)} d\xi \left(\int_E |u(x,y)|^{\frac{1}{1-\theta}} dx \right)^{1-\theta}$$

$$\text{Or : } \theta \int_0^1 C^{\theta \xi} (\operatorname{Mes}(E))^{\theta(1-\xi)} d\xi = \frac{C^{\theta} - (\operatorname{Mes}(E))^{\theta}}{\log \left(\frac{C}{\operatorname{Mes}(E)} \right)}$$

$$\text{donc : } \int_E \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+iy) dx \leq \operatorname{Mes}(E) + M_{\varepsilon}(\theta) \frac{C^{\theta} - (\operatorname{Mes}(E))^{\theta}}{\log \left(\frac{C}{\operatorname{Mes}(E)} \right)} \left(\int_E |u(x,y)|^{\frac{1}{1-\theta}} dx \right)^{1-\theta}$$

Mais $\tau \in \tilde{T} \subset T$ ce qui entraîne que $\tau \in L_p(-\infty, +\infty)$ pour chaque $1 \leq p < +\infty$, donc $\lim_{y \rightarrow +0} v(x, y) = \tau(x)$ dans $L_p(-\infty, +\infty)$ fort, ce qui implique, d'après le théorème 1.1. a) que la fonction $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(s)}{s-z} ds \in h_p$ pour $1 < p < +\infty$.

Il en résulte d'après le théorème B i) que

$$\left(\int_E |u(x, y)|^{\frac{1}{1-\theta}} dx \right)^{1-\theta} \rightarrow 0$$

lorsque $\text{Mes}(E) \rightarrow 0$, uniformément $\forall y > 0$ et pour chaque $0 < \theta < 1$.
D'où la propriété annoncée.

Remarque. D'après les démonstrations des lemmes 1.5. et 1.6., il est évident qu'on pourrait remplacer dans les énoncés la fonction $\Phi_{\theta}^{+}(z)$ par la fonction $\Phi_{\theta}^{-}(z)$.

Théorème 1.5. Pour chaque $\Phi \in \tilde{P}$, les fonctions Φ_{θ}^{+} et Φ_{θ}^{-} sont respectivement engendrées par une mesure absolument continue pour chaque $0 < \theta < 1$. Pour que Φ le soit également, il faut et il suffit que $\text{Im } \Phi_{\theta}^{+}(x+i0)$ ou $\text{Im } \Phi_{\theta}^{-}(x+i0)$ converge dans $L(-\infty, +\infty)$ fort lorsque $\theta \rightarrow 1-0$.

La première partie du théorème est évidente d'après les lemmes 1.6. et 1.5, puisque, pour chaque $0 < \theta < 1$, on a $0 \leq \theta \tau(s) \leq \theta \pi$. Pour la seconde partie, on a montré que la condition indiquée était suffisante dans la démonstration du lemme 1.5. Réciproquement, soit $\Phi \in \tilde{P}$ engendrée par une mesure absolument continue, donc $\lim_{y \rightarrow +0} \text{Im } \Phi(x+iy) = \text{Im } \Phi(x+i0)$ dans $L(-\infty, +\infty)$ fort.

$$\text{De } \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } \Phi_{\theta}^{+}(x+iy) dx = \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } \Phi(x+iy) dx$$

on a, d'après la première partie du théorème : ($0 < \theta < 1$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+i0) dx = \theta \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \Phi(x+iy) dx$$

c'est à dire par hypothèse :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+i0) dx = \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \Phi(x+i0) dx$$

d'où

$$\lim_{\theta \rightarrow 1-0} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \Phi_{\theta}^+(x+i0) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \Phi(x+i0) dx$$

§ 5.

Lemme 1.7. Soit $\Phi \in PN$ telle que :

- 1) $z^2 \Phi(z) + \sigma_0 z + \sigma_1 \rightarrow 0$ normalement lorsque $|z| \rightarrow +\infty$, avec $\sigma_0 > 0$.
- 2) $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Im} \Phi(x+i0) = 0$, p.p et $\operatorname{Re} \Phi(x+i0) \geq 0$ p.p lorsque $x < a$.

Alors $\exists \tau^* \in T$ unique telle que :

$$(1.5.1.) \quad \Phi(z) = \frac{\sigma_0}{a-z} e^{-\frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau^*(s)}{s-z} ds}, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

$$(1.5.2.) \quad \tau^*(s) = \begin{cases} 0 & \text{p.p} & s < a \\ \Pi \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im} \Phi(s+i0)}{\operatorname{Re} \Phi(s+i0)} \right) & , & s > a \\ [0, \Pi] \end{cases}$$

$$(1.5.3.) \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^*(s) ds + a$$

Considérons la fonction suivante :

$$\hat{\Phi}(z) = \log \left(\frac{a-z}{\sigma_0} \Phi(z) \right), \quad \operatorname{Im} z > 0$$

Montrons que $-\hat{\Phi} \in HL$. D'après l'hypothèse 1), on a :

$$\frac{a-z}{\sigma_0} \Phi(z) = 1 + \frac{\sigma_1 - a\sigma_0}{\sigma_0 z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \rightarrow +\infty$$

donc

$$(1.5.4.) \quad z \hat{\Phi}(z) \rightarrow \frac{\sigma_1 - a\sigma_0}{\sigma_0} \quad \text{normalement lorsque } |z| \rightarrow +\infty$$

Ensuite $\hat{\Phi}(z)$ est holomorphe dans $\text{Im } z > 0$; car $\Phi(z) \neq 0$ dans ce demi-plan et on a :

$$\arg\left(\frac{a-z}{\sigma_0} \Phi(z)\right) = \arg\left(\frac{z-a}{-\sigma_0}\right) + \arg \Phi(z)$$

où

$$-\pi < \arg\left(\frac{z-a}{-\sigma_0}\right) < 0; \quad 0 < \arg \Phi(z) < \pi$$

On peut donc poser :

$$(1.5.5.) \quad \arg\left(\frac{z-a}{-\sigma_0}\right) = -\arctan_{[0,\pi]} g\left(\frac{y}{a-x}\right)$$

$$(1.5.6.) \quad \arg \Phi(z) = \arctan_{[0,\pi]} g\left(\frac{\text{Im } \Phi(x+iy)}{\text{Re } \Phi(x+iy)}\right)$$

et visiblement

$$(1.5.7.) \quad -\pi < \arg\left(\frac{a-z}{\sigma_0} \Phi(z)\right) < \pi$$

De (1.5.5.) et (1.5.6.), on a, compte tenu de l'hypothèse 2) :

$$\text{Im } \hat{\Phi}(x+i0) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \tau(x) - \pi, & x > a \end{cases}$$

en notant
$$\tau(x) = \arctan_{[0,\pi]} g\left(\frac{\text{Im } \Phi(x+i0)}{\text{Re } \Phi(x+i0)}\right), \quad p.p$$

D'après (1.5.4.), $\hat{\Phi}(z)$ vérifie la relation (1.2.1.), donc :

$$\text{Im } \hat{\Phi}(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } \hat{\Phi}(t+iy_0) (y-y_0)}{(t-x)^2 + (y-y_0)^2} dt, \quad y > y_0 > 0$$

d'où, d'après (1.5.7.) et le théorème de Lebesgue :

$$\operatorname{Im} \hat{\Phi}(x+iy) = - \frac{1}{\Pi} \int_a^{+\infty} \frac{(\Pi - \tau(t)) y}{(t-x)^2 + y^2} dt, \quad y > 0$$

Donc $\operatorname{Im} \hat{\Phi}(x+iy) < 0$ pour $y > 0$, ce qui montre que $-\hat{\Phi} \in \mathcal{PN}$.
Mais alors, d'après le lemme 1.1., la fonction $s \rightarrow \Pi - \tau(s)$ est sommable sur $[a, +\infty[$, d'où, d'après le théorème 1.1. b) $\operatorname{Im} \hat{\Phi}(x+iy)$ converge dans $L(-\infty, +\infty)$ fort lorsque $y \rightarrow +0$; par conséquent :

$$\hat{\Phi}(z) = - \frac{1}{\Pi} \int_a^{+\infty} \frac{\Pi - \tau(s)}{s - z} ds, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

d'après le corollaire du lemme 1.1. D'où 1.5.1. L'unicité de τ^* est évidente. La relation (1.5.3.) est la transcription dans le cas actuel de (1.1.2.).

Théorème 1.6. L'ensemble des fonctions $\Phi \in \mathcal{PN}$ telles que :

- 1) $z^2 \Phi(z) + \sigma_0 z + \sigma_1 \rightarrow 0$ normalement lorsque $|z| \rightarrow +\infty$ avec $\sigma_0 > 0$
- 2) $\exists$ un intervalle fini $[a, b]$ tel que :

$$\operatorname{Im} \Phi(x+i0) = 0, \quad p.p \quad \text{pour } x \notin [a, b]$$

$$R \Phi(x+i0) \geq 0 \quad p.p \quad \text{pour } x < a; \quad R \Phi(x+i0) \leq 0 \quad p.p \quad \text{pour } x > b$$

est identique à $\tilde{\mathcal{P}}$. Chaque $\Phi \in \tilde{\mathcal{P}}$ admet la représentation :

$$(1.5.8.) \quad \Phi(z) = \frac{\sigma_0}{a-z} e^{-\frac{1}{\Pi} \int_a^b \frac{\Pi - \tau(s)}{s - z} ds}$$

où

$$(1.5.9.) \quad \tau(s) = \arctan \frac{\operatorname{Im} \Phi(s+i0)}{R \Phi(s+i0)}, \quad p.p$$

$$(1.5.10.) \quad \sigma_0 = \int_a^b d\sigma(s)$$

Il est évident qu'une fonction de $\tilde{P}$ vérifie les conditions 1) et 2) de l'énoncé. Réciproquement, soit Φ vérifiant ces conditions. D'après le lemme 1.7., cette fonction se met sous la forme (1.5.8.). Mais de :

$$\frac{b-a}{a-z} = e^{\frac{1}{\Pi} \int_a^b \frac{\Pi}{s-z} ds} - 1$$

on a :

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\sigma_0}{b-a} \left\{ e^{\frac{1}{\Pi} \int_a^b \frac{\tau(s)}{s-z} ds} - e^{\frac{1}{\Pi} \int_a^b \frac{\Pi - \tau(s)}{s-z} ds} \right\} \\ &= \frac{\sigma_0}{b-a} \left(\Phi_1(z) + \Phi_2(z) \right) \end{aligned}$$

où $\Phi_i(z) \in \tilde{P}$. ($i = 1, 2$). Du théorème 1.4., on a :

$$\Phi_i(z) = \int_a^b \frac{d\sigma_i(s)}{s-z}$$

d'où

$$\Phi(z) = \frac{\sigma_0}{b-a} \int_a^b \frac{d(\sigma_1(s) + \sigma_2(s))}{s-z} = \int_a^b \frac{d\sigma(s)}{s-z}$$

et on a bien l'égalité (1.5.10.)

Théorème 1.7. Toute $\Phi \in \tilde{P}$ admet la décomposition unique :

$$(1.5.11.) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\Pi} \int_a^b \frac{\text{Im} \Phi(s+i0)}{s-z} ds + R(z)$$

$$\left(\text{si } \Phi(z) = \int_a^b \frac{d\mu(s)}{s-z} \right) \text{ où } R \in \tilde{P} \text{ vérifie } \text{Im} R(x+i0) = 0 \text{ p.p}$$

Soit $\Phi \in \tilde{P}$; considérons la fonction suivante :

$$R(z) = \Phi(z) - \Phi_1(z) \quad \text{où} \quad \Phi_1(z) = \frac{1}{\Pi} \int_a^b \frac{\text{Im} \Phi(s+i0)}{s-z} ds$$

La fonction Φ vérifie les relations (1.2.1.) et (1.2.2.); en particulier de l'une et de l'autre, on a :

$$(1.5.12.) \quad \text{Im} \Phi(x+iy) = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im} \Phi(t+iy) (y-y_0)}{(t-x)^2 + (y-y_0)^2} dt, \quad y > y_0 > 0$$

$$(1.5.13.) \quad R \Phi(x+iy) = \frac{1}{\Pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{(t-x) \text{Im} \Phi(t+iy_0)}{(t-x)^2 + (y-y_0)^2} dt$$

Lorsque $y_0 \rightarrow +0$, la relation (1.5.12.) fournit à l'aide du lemme de Fatou :

$$\frac{1}{\Pi} \int_a^b \frac{y \text{Im} \Phi(t+i0)}{(t-x)^2 + y^2} dt \leq \text{Im} \Phi(x+iy)$$

c'est à dire

$$\text{Im} R(x+iy) \geq 0.$$

D'autre part, en posant :

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{\Pi} \int_a^b s^n \text{Im} \Phi(s+i0) ds, \quad n \geq 0$$

on a facilement :

$$\Phi(z) - \Phi_1(z) = - \frac{\mu_0 - \hat{\mu}_0}{z} - \frac{\mu_1 - \hat{\mu}_1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right), \quad |z| \rightarrow +\infty$$

c'est à dire :

$z^2 R(z) + (\mu_0 - \hat{\mu}_0) z + \mu_1 - \hat{\mu}_1 \rightarrow 0$ normalement lorsque $|z| \rightarrow +\infty$
 où $\mu_0 - \hat{\mu}_0 \geq 0$ en vertu du lemme de Fatou. Si $\hat{\mu}_0 = \mu_0$, alors $R(z) = 0$
 d'après la remarque 2 du théorème A. Supposons $\hat{\mu}_0 < \mu_0$. D'après la définition de $R(z)$, on a bien $\text{Im} R(x+i0) = 0$ p.p

D'autre part, de (1.5.13.) dont l'intégrale au second membre converge absolument ici, on a :

$$\Re \Phi(x+iy) = \frac{1}{\pi} \lim_{y_0 \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-x) \operatorname{Im} \Phi(t+iy_0)}{(t-x)^2 + (y-y_0)^2} dt$$

Mais $\operatorname{Im} \Phi(t+iy_0)$ converge dans $L_p(-\infty, a-\varepsilon)$ fort et dans $L_p(b+\varepsilon, +\infty)$ fort pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour chaque $1 < p < +\infty$.
Donc :

$$\Re \Phi(x+iy) = \frac{1}{\pi} \lim_{y_0 \rightarrow +0} \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \frac{(t-x) \operatorname{Im} \Phi(t+iy_0)}{(t-x)^2 + (y-y_0)^2} dt$$

Pour $x \leq a - 2\varepsilon$, d'après le lemme de Fatou :

$$\frac{1}{\pi} \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \frac{(t-x) \operatorname{Im} \Phi(t+i0)}{(t-x)^2 + y^2} dt \leq \Re \Phi(x+iy), \quad y > 0$$

et d'après le théorème de Lebesgue, lorsque $y \rightarrow +0$

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\operatorname{Im} \Phi(t+i0)}{t-x} dt \leq \Re \Phi(x+i0)$$

c'est à dire $\Re \Re(x+i0) \geq 0$ pour $x > a$.

Pour $x \geq b+2\varepsilon$, on a :

$$\frac{1}{\pi} \lim_{y_0 \rightarrow +0} \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \frac{(x-t) \operatorname{Im} \Phi(t+iy_0)}{(t-x)^2 + (y-y_0)^2} dt = -\Re \Phi(x+iy)$$

c'est à dire d'après Fatou :

$$-\frac{1}{\pi} \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \frac{(x-t) \operatorname{Im} \Phi(t+i0)}{(x-t)^2 + y^2} dt \leq -\Re \Phi(x+iy), \quad y > 0$$

et lorsque $y \rightarrow +0$, d'après Lebesgue :

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\operatorname{Im} \Phi(t+i0)}{x-t} dt \leq -R \Phi(x+i0)$$

c'est à dire : $\operatorname{Re} R(x+i0) \leq 0$, pour $x > b$

En résumé la fonction $R(z)$ vérifie les conditions du théorème 1.6. elle est donc dans $\tilde{P}$.

Supposons qu'on ait :

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(s)}{s-z} ds + R_1(z)$$

avec $\operatorname{Im} R_1(x+i0) = 0$ p.p. Alors nécessairement :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \Phi(x+i0), \text{ p.p.}$$

donc aussi

$$R_1(z) = R(z)$$

Remarque : On n'utilisera pas ce résultat dans la suite.

§ 6. Dans le reste de ce travail, nous nous placerons exclusivement dans l'intervalle $[0,1]$. Pour simplifier nous utiliserons les notations suivantes : pour $\sigma \in L[0,1]$, nous poserons :

$$\gamma(z; \sigma) = \int_0^1 \frac{\sigma(s)}{s-z} ds, \quad z \in C - [0,1];$$

$$\mathcal{R}_z\{\sigma\} = \int_0^1 \frac{\sigma(s)}{s+z} ds, \quad z \in C - [-1,0];$$

$$\mathcal{P}_s\{\sigma\} = \int_0^1 \frac{\sigma(s')}{s'-s} ds', \quad 0 < s < 1$$

où la dernière intégrale est prise au sens de la valeur principale.

Nous aurons besoin de la formule d'interversion de Poincaré-Bertrand qui se démontre simplement de la façon suivante : considérons la fonction holomorphe :

$$\Phi(z) = \gamma(z; \sigma_1) \gamma(z; \sigma_2)$$

$$\text{où } \sigma_1 \in L_{p_1} [0,1] , \quad \sigma_2 \in L_{p_2} [0,1] \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} < 1$$

Alors $\Phi \in h_p$ et vérifie (1.1.5.) qui s'écrit ici :

$$(1.6.1.) \quad \mathcal{P}_s \left\{ \sigma_1(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_2\} + \sigma_2(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_1\} \right\} = \mathcal{P}_s\{\sigma_1\} \mathcal{P}_s\{\sigma_2\} \pi^2_{p,p} \sigma_1(s) \sigma_2(s),$$

$$0 < s < 1$$

$$(1.6.2.) \quad \gamma(s; \sigma_1(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_2\} + \sigma_2(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_1\}) = \gamma(s; \sigma_1) \gamma(s; \sigma_2)$$

$$s < 0 \quad \text{ou} \quad s > 1.$$

La relation (1.6.1.) est équivalente à la formule de Poincaré-Bertrand. Elle peut être généralisée au cas où l'une des fonctions σ_i possède des singularités plus fortes aux extrémités de l'intervalle.

Introduisons les espaces suivants :

$$N_p[0,1] = \{ \sigma \in L[0,1] ; \quad s(1-s)\sigma(s) \in L_p[0,1] , \quad p > 1 \}$$

$$N_p^{(0)}[0,1] = \{ \sigma \in L[0,1] ; \quad s \sigma(s) \in L_p[0,1] , \quad p > 1 \}$$

$$N_p^{(1)}[0,1] = \{ \sigma \in L[0,1] \quad (1-s) \sigma(s) \in L_p[0,1] , \quad p > 1 \}$$

Ce sont évidemment trois sous-espaces vectoriels de $L[0,1]$ qu'on peut munir respectivement, d'une structure d'espaces normés par :

$$v_p(\sigma) = \|\sigma\|_1 + \left(\int_0^1 |s(1-s)\sigma(s)|^p ds \right)^{1/p}, \quad \sigma \in N_p[0,1]$$

$$v_p^0(\sigma) = \|\sigma\|_1 + \left(\int_0^1 |s\sigma(s)|^p ds \right)^{1/p}, \quad \sigma \in N_p^{(0)}[0,1]$$

$$v_p^1(\sigma) = \|\sigma\|_1 + \left(\int_0^1 |(1-s)\sigma(s)|^p ds \right)^{1/p}, \quad \sigma \in N_p^{(1)}[0,1]$$

On a :

$$\begin{aligned} L[0,1] &= N_p^{(0)}[0,1] \cap N_p^{(1)}[0,1] \subset N_p^{(0)}[0,1] \cup N_p^{(1)}[0,1] \\ &\subset N_p[0,1] \end{aligned}$$

Soit d'autre part, les espaces suivants :

$$n_q[0,1] = \{ \sigma \in L_q[0,1], \quad q > 1; \quad \frac{\sigma(s)}{s(1-s)} \in L_q[0,1] \}$$

$$n_q^{(0)}[0,1] = \{ \sigma \in L_q[0,1], \quad q > 1; \quad \frac{\sigma(s)}{s} \in L_q[0,1] \}$$

$$n_q^{(1)}[0,1] = \{ \sigma \in L_q[0,1], \quad q > 1; \quad \frac{\sigma(s)}{1-s} \in L_q[0,1] \}$$

munis respectivement de la norme :

$$\tilde{v}_q(\sigma) = \left(\int_0^1 \left| \frac{\sigma(s)}{s(1-s)} \right|^q ds \right)^{1/q}, \quad \sigma \in n_q[0,1]$$

$$\tilde{v}_q^0(\sigma) = \left(\int_0^1 \left| \frac{\sigma(s)}{s} \right|^q ds \right)^{1/q}, \quad \sigma \in n_q^{(0)}[0,1]$$

$$\tilde{v}_q^1(\sigma) = \left(\int_0^1 \left| \frac{\sigma(s)}{1-s} \right|^q ds \right)^{1/q}, \quad \sigma \in n_q^{(1)}[0,1]$$

On a :

$$\begin{aligned} n_q[0,1] &= n_q^{(0)}[0,1] \cap n_q^{(1)}[0,1] \subset n_q^{(0)}[0,1] \cup n_q^{(1)}[0,1] \\ &\subset L_q[0,1] \end{aligned}$$

Lemme 1.8. Soit les trois conditions :

- i) $\sigma_1 \in N_p[0,1]$, $\sigma_2 \in n_q[0,1]$
- ii) $\sigma_1 \in N_p^{(0)}[0,1]$, $\sigma_2 \in n_q^{(0)}[0,1]$
- iii) $\sigma_1 \in N_p^{(1)}[0,1]$, $\sigma_2 \in n_q^{(1)}[0,1]$

avec
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1$$

Alors $\sigma_1 \sigma_2 \in N_r[0,1]$, $N_r^{(0)}[0,1]$, $N_r^{(1)}[0,1]$ suivant que i) , ii) , ou iii) est réalisé.

Evident .

Remarque : L'opérateur $\mathcal{P}_s\{ \cdot \}$ ne transforme pas $N_p[0,1]$ en lui-même . Car soit :

$$\sigma(s) = s^{-1} \left(\log \left(\frac{e}{s} \right) \right)^{-2}$$

qui est dans $N_p^{(0)}[0,1]$ pour chaque $1 < p < + \infty$.

On a :

$$\mathcal{P}_s \left\{ s'^{-1} \left(\log \frac{e}{s'} \right)^{-2} \right\} \underset{s \rightarrow +0}{\sim} s^{-1} \left(\log \frac{e}{s} \right)^{-1}$$

qui n'est pas sommable .

Par contre, on a :

Lemme 1.9. Les fonctions $s \rightarrow \sigma_1(s) \mathcal{P}_s\{\sigma_2\}$ et $s \rightarrow \sigma_2(s) \mathcal{P}_s\{\sigma_1\}$ appartiennent à $N_r[0,1]$, $N_r^{(0)}[0,1]$, $N_r^{(1)}[0,1]$ suivant que l'hypothèse i) , ii) ou iii) du lemme 1.8. est réalisée .

Traisons le cas de i) . Puisque $\sigma_2 \in n_q[0,1]$, on peut écrire :

$$\mathcal{P}_s\{\sigma_2\} = s(1-s) \mathcal{P}_s \left\{ \frac{\sigma_2(s')}{s'(1-s')} \right\} = s \int_0^1 \frac{\sigma_2(s')}{s'(1-s')} ds' + \int_0^1 \frac{\sigma_1(s')}{s'} ds'$$

de sorte que $\sigma_1(s) \mathcal{P}_s\{\sigma_2\} \in L[0,1]$. De plus visiblement, cette fonction est dans $N_r[0,1]$

D'autre part,

$$\sigma_2(s) \mathcal{P}_s\{\sigma_1\} = \frac{\sigma_2(s)}{s(1-s)} \left\{ \mathcal{P}_s\{s'(1-s') \sigma_1(s')\} \right\} + \int_0^1 s' \sigma_1(s') ds' - (1-s) \int_0^1 \sigma_1(s') ds'$$

ce qui montre bien que le premier membre est sommable et $s(1-s) \sigma_2(s) \mathcal{P}_s\{\sigma_1\}$ dans $L_r[0,1]$.

Théorème 1.8. Sous l'une des trois hypothèses i), ii) ou iii) du lemme 1.8., on a les formules :

$$\mathcal{P}_s\{\sigma_1(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_2\} + \sigma_2(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_1\}\} = \mathcal{P}_s\{\sigma_1\} \mathcal{P}_s\{\sigma_2\}$$

$$(1.6.3.) \quad -\pi^2 \sigma_1(s) \sigma_2(s), \quad p.p \ 0 < s < 1$$

$$\chi(z; \sigma_1(s) \mathcal{P}_s\{\sigma_2\} + \sigma_2(s) \mathcal{P}_s\{\sigma_1\}) = \chi(z; \sigma_1) \chi(z; \sigma_2)$$

$$(1.6.4.) \quad z \in C - [0,1]$$

$$(1.6.5.) \quad \int_0^1 (\sigma_1(s) \mathcal{P}_s\{\sigma_2\} + \sigma_2(s) \mathcal{P}_s\{\sigma_1\}) ds = 0$$

Traisons le cas i). Les formules (1.6.1.) et (1.6.2.) sont valables pour la paire $s(1-s) \sigma_1(s)$ et $\sigma_2(s)$ d'après l'hypothèse :

$$\mathcal{P}_s\{s'(1-s') \sigma_1(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_2\} + \sigma_2(s') \mathcal{P}_{s'}\{\xi(1-\xi) \sigma_1(\xi)\}\} =$$

$$(1.6.6.) \quad \mathcal{P}_s\{s'(1-s') \sigma_1(s')\} \mathcal{P}_s\{\sigma_2\} - \pi^2 s(1-s) \sigma_1(s) \sigma_2(s), \quad p.p \ 0 < s < 1$$

$$\chi\left(s; s'(1-s') \sigma_1(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_2\} + \sigma_2(s') \mathcal{P}_{s'}\{\xi(1-\xi) \sigma_1(\xi)\}\right) =$$

$$(1.6.7.) \quad \chi\left(s; s'(1-s') \sigma_1(s')\right) \chi(s; \sigma_2), \quad s < 0 \text{ ou } s > 1$$

$$\text{De } \mathcal{P}_s\{\xi(1-\xi) \sigma_1(\xi)\} = s \mathcal{P}_s\{(1-\xi) \sigma_1(\xi)\} + \int_0^1 (1-\xi) \sigma_1(\xi) d\xi$$

$$\gamma \left(s ; \xi (1-\xi) \sigma_1(\xi) \right) = s \gamma \left(s ; (1-\xi) \sigma_1(\xi) \right) + \int_0^1 (1-\xi) \sigma_1(\xi) d\xi$$

on a, pour (1.6.7.) :

$$\gamma \left(s ; s' [(1-s') \sigma_1(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_2\} + \sigma_2(s') \mathcal{P}_{s'}\{(1-\xi) \sigma_1(\xi)\}] \right) =$$

$$(1.6.8.) \quad s \gamma \left(s ; (1-s') \sigma_1(s') \right) \gamma(s ; \sigma_2) , \quad s < 0 \text{ ou } s > 1 .$$

La fonction dans la parenthèse du premier membre est sommable d'après le lemme 1.9. ; dans (1.6.8.) faisons $s < 0$, $s \rightarrow -0$; d'après le théorème de Lebesgue, il vient :

$$(1.6.9.) \quad \int_0^1 [(1-s') \sigma_1(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_2\} + \sigma_2(s') \mathcal{P}_{s'}\{(1-\xi) \sigma_1(\xi)\}] ds' = 0$$

puisque

$$s \gamma(s ; (1-s') \sigma_1(s')) \rightarrow 0$$

$$\gamma(s ; \sigma_2) \rightarrow \int_0^1 \frac{\sigma_2(s')}{s'} ds'$$

La relation (1.6.8.) devient alors, compte tenu de (1.6.9.) :

$$\gamma \left(s ; (1-s') \sigma_1(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_2\} + \sigma_2(s') \mathcal{P}_{s'}\{(1-\xi) \sigma_1(\xi)\} \right)$$

$$(1.6.10.) \quad \gamma \left(s ; (1-s') \sigma_1(s') \right) \gamma(s ; \sigma_2) , \quad s < 0 \text{ ou } s > 1$$

$$\text{De } \mathcal{P}_s\{(1-\xi) \sigma_1(\xi)\} = (1-s) \mathcal{P}_s\{\sigma_1\} - \int_0^1 \sigma_1(\xi) d\xi$$

$$\gamma \left(s ; (1-\xi) \sigma_1(\xi) \right) = (1-s) \gamma(s ; \sigma_1) - \int_0^1 \sigma_1(\xi) d\xi$$

on a, pour (1.6.10) :

$$\gamma \left(s ; (1-s') [\sigma_1(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_2\} + \sigma_2(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma_1\}] \right) = (1-s) \gamma(s ; \sigma_2)$$

$$\gamma(s ; \sigma_2)$$

$$(1.6.11.)$$

$$s < 0 \text{ ou } s > 1$$

Faisons $s > 1$, $s \rightarrow 1-0$ dans (1.6.11.) . A l'aide du même raisonnement que plus haut, on obtient (1.6.5.) qui permet d'obtenir (1.6.4.) à partir de (1.6.11.).

On a facilement (1.6.2.) à partir de (1.6.6.) en utilisant (1.6.9.) et (1.6.5.).

CHAPITRE II

§ 1- Ce chapitre est consacré à l'étude d'une classe d'équations singulières linéaires auxquelles se ramène la résolution de l'équation non linéaire de Chandrasehkar :

$$(2.1.1.) \quad \frac{1}{H(s)} = 1-s \int_0^1 \frac{\Psi(s') H(s')}{s' + s} ds' ; \quad 0 < s \leq 1.$$

où la fonction $s \longrightarrow \Psi(s)$ est donnée.

Cette équation a été étudiée par Crum [12] et Busbridge [1] en particulier. Ces deux auteurs l'ont résolue complètement à l'aide de la méthode de Wiener-Hopf.

L'idée de ramener l'étude de (2.1.1.) à celle d'une équation linéaire singulière est due à Fox [4] ; cet auteur définit la fonction H dans $] -1, 0 [$ par :

$$(2.1.2.) \quad H(-s) = 1+s \int_0^1 \frac{\Psi(s') H(s')}{s' - s} ds', \quad 0 < s < 1.$$

et démontre l'identité suivante :

$$(2.1.3.) \quad H(s) H(-s) = \frac{1}{\tau(s)}, \quad 0 < s < 1.$$

où

$$(2.1.4.) \quad \tau(s) = 1 - 2s^2 \int_0^1 \frac{\Psi(s')}{s^2 - s'^2} ds', \quad 0 < s < 1.$$

l'intégrale étant prise au sens de la valeur principale.

A partir de (2.1.2.) et (2.1.3.), il obtint tout de suite l'équation singulière :

$$(2.1.5.) \quad \mathcal{C}(s) H(s) - s \int_0^1 \frac{\Psi(s') H(s')}{s' - s} ds' = 1, \quad 0 < s < 1.$$

l'intégrale étant prise au sens de la valeur principale, Fox intègre (2.1.5) à l'aide de la méthode classique qu'on trouve dans l'ouvrage de Muskhelishvili [13]. Mais il se place dans les hypothèses artificielles qui sont rarement réalisées dans les applications. De plus, il n'étudie pas l'équivalence des équations (2.1.1.) et (2.1.5.) ; ce problème est abordé par Busbridge [14] à l'aide d'une méthode de comparaison qui fait intervenir des résultats de [1].

Nous traiterons ce problème au chapitre III sans aucune référence à des résultats déjà acquis par d'autres méthodes. De plus, nous utiliserons la technique de Fox pour résoudre complètement le système de Chandraschkar (voir p. 97) en le ramenant à l'étude d'une équation singulière un peu plus générale que (2.1.5.), mais dont la résolution se déduira des résultats obtenus dans ce chapitre.

L'idée de Fox a été reprise ces dernières années par Mullikin [2.3.] qui applique les méthodes de [13] en supposant Ψ lipschitzienne. La méthode utilisée ici, basée sur les résultats du chapitre I et qui est essentiellement celle de Carleman-Tricomi [6, 8], permet de supposer seulement que $\Psi \in N_p^{(0)}[0,1]$, $p > 1$.

L'équation (2.1.5.) peut s'écrire :

$$\mathcal{C}(s) \varphi(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s \{ \varphi \} = \Psi(s), \quad 0 < s < 1.$$

en posant

$$(2.1.6.) \quad \varphi(s) = \Psi(s) H(s)$$

Nous étudions l'équation suivante :

$$(2.1.7.) \quad \mathcal{C}(s) \varphi(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s\{\varphi\} = \Psi(s) h(s), \quad 0 < s < 1.$$

où h est une fonction donnée, et l'équation adjointe de (2.1.7.), soit :

$$(2.1.8.) \quad \mathcal{C}(s) \varphi^*(s) + \mathcal{P}_s\{s' \Psi(s') \varphi^*(s')\} = g(s), \quad 0 < s < 1.$$

qu'on peut écrire :

$$(2.1.9.) \quad \mathcal{C}(s) \chi(s) + s \Psi(s) \mathcal{P}_s\{\chi\} = s \Psi(s) g(s), \quad 0 < s < 1.$$

$$(2.1.10) \quad \chi(s) = s \Psi(s) \varphi^*(s)$$

§ 2 : Soit la fonction analytique :

$$(2.2.1.) \quad T(z) = 1 - 2z^2 \int_0^1 \frac{\Psi(s)}{z^2 - s^2} ds$$

dont on prend la détermination qui est réelle pour $z > 1$: elle est alors holomorphe dans tout le plan muni de la coupure $[-1, +1]$. La répartition des zéros de cette fonction est donnée par le lemme suivant, qui est démontré dans [1] :

Lemme 2.1. On pose $\Psi_n = \int_0^1 \Psi(s) s^n ds, \quad n \geq 0.$

$$a) \quad T(1+0) < 0.$$

$$a_1) \quad \underline{\text{Si}} \quad 1 - 2 \Psi_0 > 0$$

$$\underline{T(z) \text{ possède deux zéros } w \text{ et } -w \text{ avec } w > 1.}$$

$$a_2) \quad \underline{\text{Si}} \quad 1 - 2 \Psi_0 = 0$$

$$\underline{T(z) \text{ possède un zéro double à l'infini.}}$$

$$a_3) \quad \underline{\text{Si}} \quad 1 - 2 \Psi_0 < 0$$

$$\underline{T(z) \text{ possède deux zéros } iw \text{ et } -iw}$$

$$\text{avec } w > 0$$

$$b) \quad T(1+0) > 0 \quad (\text{nécessairement } 1 - 2 \Psi_0 > 0)$$

$$\underline{T(z) \text{ ne s'annule pas.}}$$

Remarque. Le cas $T(1+0) = 0$ sera laissé de côté car il demande, en principe des hypothèses supplémentaires sur la fonction Ψ .

Lemme 2.2. Soit $\Psi(s) \geq 0$, $s \in [0,1]$, $\Psi \in L[0,1]$. Posons :

$$(2.2.2.) \quad \tau(s) = \arctan_{[0, \pi]} \left(\frac{\pi s \Psi(s)}{\tau(s)} \right), \quad 0 < s < 1$$

$$(2.2.3.) \quad R_z \{ \tau \} = \int_0^1 \frac{\tau(s)}{s+z} ds, \quad z \in C - [-1, 0]$$

$$(2.2.4.) \quad F_z \{ \tau \} = \exp \left(\frac{1}{\pi} \gamma(z; \tau) + \frac{1}{\pi} R_z \{ \tau \} \right),$$

$$z \in C - [-1, +1]$$

$$(2.2.5.) \quad \mathfrak{F}_s \{ \tau \} = \exp \left(\frac{1}{\pi} \mathcal{P}_{|s|} \{ \tau \} + \frac{1}{\pi} \mathcal{R}_{|s|} \{ \tau \} \right), \quad -1 < s < +1$$

On distingue les cas mis en évidence dans le lemme. 2.1. On a alors :

$$a) \quad T(1+0) < 0.$$

$$a_1) \quad \underline{\text{Si}} \quad 1 - 2 \Psi_0 > 0, \quad \underline{\text{on a :}}$$

$$(2.2.6.) \quad F_z \{ \tau \} = \frac{1}{1-2 \Psi_0} \frac{1-z^2}{w^2-z^2} T(z)$$

$$(2.2.7.) \quad \mathfrak{F}_s \{ \tau \} = \frac{1}{1-2 \Psi_0} \frac{1-s^2}{w^2-s^2} \left(\pi^2 s^2 \Psi^2(|s|) + \varrho^2(s) \right)^{1/2}$$

$$a_2) \quad \underline{\text{Si}} \quad 1 - 2 \Psi_0 = 0, \quad \underline{\text{on a :}}$$

$$(2.2.8.) \quad F_z \{ \tau \} = \frac{1}{2 \Psi_2} (1-z^2) T(z)$$

$$(2.2.9.) \quad \mathfrak{F}_s \{ \tau \} = \frac{1}{2 \Psi_2} (1-s^2) \left(\pi^2 s^2 \Psi^2(|s|) + \varrho^2(s) \right)^{1/2}$$

a₃) Si $1 - 2 \Psi_0 < 0$, on a :

$$(2.2.10.) \quad F_z \{ \tau \} = \frac{1}{2 \Psi_0 - 1} \cdot \frac{1 - z^2}{w^2 + z^2} T(z)$$

$$(2.2.11.) \quad \mathfrak{F}_s \{ \tau \} = \frac{1}{2 \Psi_0 - 1} \cdot \frac{1 - s^2}{w^2 + s^2} \left(\Pi^2 s^2 \Psi^2(|s|) + \varrho^2(s) \right)^{1/2}$$

b) $T(1+0) > 0$. On a

$$(2.2.12.) \quad F_z \{ \tau \} = \frac{1}{1 - 2 \Psi_0} T(z)$$

$$(2.2.13.) \quad \mathfrak{F}_s \{ \tau \} = \frac{1}{1 - 2 \Psi_0} \left(\Pi^2 s^2 \Psi^2(|s|) + \varrho^2(s) \right)^{1/2}$$

Dans toute démonstration on utilise la détermination de logarithme qui est réelle pour $z > 0$.

a₁) Considérons la fonction suivante dans le plan muni de la coupure $[-1, +1]$:

$$\frac{1}{1 - 2 \Psi_0} \cdot \frac{z^2}{z^2 - w^2} T(z)$$

Elle y est holomorphe ; en développant $T(z)$ pour $|z| > 1$, on voit qu'elle tend vers un normalement lorsque $|z| \rightarrow +\infty$; considérons alors la fonction suivante :

$$\Phi(z) = \log \left(\frac{1}{1 - 2 \Psi_0} \cdot \frac{z^2}{z^2 - w^2} T(z) \right) \quad \text{Im } z > 0$$

Elle tend vers zéro normalement lorsque $|z| \rightarrow +\infty$. De plus elle est holomorphe dans $\text{Im } z > 0$. En effet, on a :

$$T(z) = 1 - 2 \Psi_0 + \int_0^1 \frac{s' \Psi(s')}{s' + z} ds' + \int_0^1 \frac{s' \Psi(s')}{s' - z} ds'$$

$$T(z) = 1 - 2 \Psi_0 + \int_0^1 \frac{s \Psi(s) (s-x-iy)}{(s+x)^2 + y^2} ds + \int_0^1 \frac{s \Psi(s) (s-x+iy)}{(s-x)^2 + y^2} ds$$

d'où

$$\operatorname{Im} T(z) = 4xy \int_0^1 \frac{s^2 \Psi(s) ds}{[(s-x)^2 + y^2][(s+x)^2 + y^2]}$$

On a donc : $\operatorname{Im} T(z) > 0$ si $x > 0$ et $\operatorname{Im} T(z) < 0$ si $x < 0$.

Il est ainsi possible de poser :

$$\arg \left((1 - 2\Psi_0)^{-1} T(z) \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im} T(z)}{\operatorname{Re} T(z)} \right) \quad , \quad x < 0, y > 0$$

[$-\pi, 0$]

$$\arg \left((1 - 2\Psi_0)^{-1} T(z) \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im} T(z)}{\operatorname{Re} T(z)} \right) \quad , \quad x > 0, y > 0$$

[$0, \pi$]

D'autre part,

$$\frac{z^2}{z^2 - w^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{x^2 - w^2 - y^2 + 2ixy}$$

d'où

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z^2}{z^2 - w^2} \right) = \frac{-2w^2xy}{(x^2 - w^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$$

c'est à dire :

$$x \operatorname{Im} \left(\frac{z^2}{z^2 - w^2} \right) < 0$$

Il en résulte : $|\operatorname{Im} \Phi(x+iy)| < \pi$. La fraction Φ vérifie les conditions du lemme 1.2.; on a donc :

$$(2.2.14.) \quad \operatorname{Im} \Phi(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \Phi(t + iy_0) (y - y_0)}{(t-x)^2 + (y - y_0)^2} dt, \quad y > y_0 > 0$$

On déduit facilement des relations ci dessus et de :

$$T(x+i0) = \begin{cases} \mathcal{C}(x) + i\pi x \Psi(|x|) & p.p., |x| < 1. \\ T(x) & , |x| > 1 \end{cases}$$

$$\arg \left((1-2\Psi_0)^{-1} T(x+iy) \right) \xrightarrow{y \rightarrow +0} \begin{cases} 0 & x < -w \\ -\Pi & -w < x < -1 \\ -\tau(-x) & -1 < x < 0 \\ \tau(x) & 0 < x < 1 \\ \Pi & 1 < x < w \\ 0 & x > w \end{cases} \quad p.p$$

(car $T(x) > 0$ pour $|x| > w$) ; et :

$$\arg \left(\frac{z^2}{z^2 - w^2} \right) \xrightarrow{y \rightarrow +0} \begin{cases} 0 & x < -w \\ \Pi & -w < x < 0 \\ -\Pi & 0 < x < w \\ 0 & x > w \end{cases}$$

de sorte que :

$$(2.2.15_*) \quad \operatorname{Im} \Phi(x+i0) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \Pi - \tau(-x) & -1 < x < 0 \\ -\Pi + \tau(x) & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad p.p$$

où $\tau(x)$ est définie par (2.2.2_*). Lorsque $y_0 \rightarrow +0$ la relation (2.214_*) devient, d'après le théorème de Lebesgue :

$$\operatorname{Im} \Phi(x+iy) = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} (t+i0) y}{(t-x)^2 + y^2} dt, \quad y > 0$$

Mais d'après (2.2.15_*) , $\operatorname{Im} \Phi(t+i0) \in L_p(-\infty, +\infty)$ pour chaque $1 \leq p < +\infty$; donc $\operatorname{Im} \Phi(x+iy) \xrightarrow{y \rightarrow +0} \operatorname{Im} \Phi(x+i0)$ dans $L_p(-\infty, +\infty)$ fort, ce qui implique, d'après le théorème 1.1. a) que

$\Phi \in h_p$, $1 < p < +\infty$; d'où d'après le théorème B ii)

$$\Phi(z) = \frac{1}{\Pi} \int_{-1}^0 \frac{\Pi - \tau(-s)}{s - z} ds + \frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{-\Pi + \tau(s)}{s - z} ds$$

compte tenu de (2.2.15_*). D'où facilement (2.2.6_*) et (2.2.7_*).

a_2) On considère dans ce cas la fonction suivante :

$$\Phi(z) = \log \left(- \frac{z^2 T(z)}{2 \Psi_2} \right)$$

où $-\frac{z^2 T(z)}{2 \Psi_2}$ est positive pour z réel, $|z| > 1$

et vérifie $-\frac{z^2 T(z)}{2 \Psi_2} = 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right), |z| > 1.$

Par la même technique qu'un a_1) on aboutit à (2.2.8.) et (2.2.9.)

a_3) On choisit ici

$$\Phi(z) = \log \left(\frac{1}{1 - 2 \Psi_0} \frac{z^2}{z^2 + w^2} T(z) \right)$$

où $\frac{1}{1 - 2 \Psi_0} \frac{z^2}{z^2 + w^2} T(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right), |z| > 1$

cette fonction étant positive pour z réel, $|z| > 1.$

b) Dans ce cas :

$$\Phi(z) = \log \left(\frac{1}{1 - 2 \Psi_0} T(z) \right)$$

d'où facilement (2.2.12.) et (2.2.13.)

On en déduit

Théorème 2.1. Posons :

$$(2.2.16.) \quad \alpha = \exp \left\{ - \frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{s} ds \right\}$$

$$k^2 = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } 1 - 2 \Psi_0 = 0 \\ \operatorname{sgn} (1 - 2 \Psi_0) \frac{1}{w^2} & \text{si } 1 - 2 \Psi_0 \neq 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} T(1+0) < 0 \\ T(1+0) > 0 \end{array}$$

(2.2.17.)

en rappelant que w est défini par :

$$T(w) = 0, \quad 1 < w \leq +\infty \quad \text{si} \quad 1 - 2 \Psi_0 \geq 0$$

$$T(iw) = 0, \quad w > 0 \quad \text{si} \quad 1 - 2 \Psi_0 < 0$$

Alors on a :

$$(2.2.18.) \quad F_z \{ \tau \} = \alpha^{-2} \frac{1 - z^2}{1 - K^2 z^2} T(z), \quad z \in C - [-1, +1]$$

$$(2.2.19.) \quad \mathcal{V}_s \{ \tau \} = \alpha^{-2} \frac{1 - s^2}{1 - K^2 s^2} \left(\Pi^2 s^2 \Psi^2(|s|) + \tau^2(s) \right)^{1/2}, \quad -1 < s < +1$$

Montrons d'abord que α n'est pas nul, c'est à dire que

$$\int_0^1 \frac{\tau(s)}{s} ds < +\infty$$

$$\text{de } T(i\xi) = 1 - 2 \int_0^1 \frac{\xi^2}{\xi^2 + s^2} \Psi(s) ds, \quad \xi > 0$$

on voit que

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} T(i\xi) = 1$$

en vertu du théorème de Lebesgue. Il en résulte, d'après (2.2.6.) (2.2.8.)

(2.2.10) (2.2.12.) que

$$(2.2.20.) \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} F_{i\xi} \{ \tau \} = \frac{1}{1 - 2 \Psi_0} \frac{1}{w^2}, \quad \frac{1}{2 \Psi_2}, \quad \frac{1}{2 \Psi_0 - 1} \frac{1}{w^2} \frac{1}{1 - 2 \Psi_0}$$

suivant qu'on se trouve dans l'un des cas $a_1), a_2), a_3)$ ou $b)$. Or on a :

$$\frac{1}{\Pi} \left(\gamma(z; \tau) + R_z \{ \tau \} \right) = \frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{2s \tau(s)}{s^2 - z^2} ds$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\Pi} \left(\gamma(i\xi; \tau) + R_{i\xi} \{ \tau \} \right) = \frac{2}{\Pi} \int_0^1 \frac{s \tau(s)}{s^2 + \xi^2} ds$$

Lorsque $\xi \rightarrow +0$ $\frac{s \tau(s)}{s^2 + \xi^2} \rightarrow \frac{\tau(s)}{s}$ p.p

et puisque $\tau(s) \geq 0$, le lemme de Fatou entraîne, d'après (2.2.20.) l'exis-

tence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\tau(s)}{s} ds$.

Mais alors le théorème de Lebesgue implique :

$$\frac{2}{\Pi} \lim_{\xi \rightarrow +0} \int_0^1 \frac{s \tau(s)}{s^2 + \xi^2} ds$$

$$(2.2.21.) \lim_{\xi \rightarrow +0} F_{i\xi} \{ \tau \} = e \quad \quad \quad = \alpha^{-2}$$

Compte tenu de (2.2.21.) (2.2.20.) et (2.2.17.), on aboutit facilement à (2.2.18.) et (2.2.19.)

Dans toute la suite de cette étude, nous ferons les hypothèses minimums suivantes :

$$H_1. \quad \Psi(s) \geq 0, \quad \forall s \in [0,1]; \quad \Psi \in L[0,1]$$

$$H_2. \quad \text{Il existe } 0 \leq p(s) \leq 1 \quad \text{et} \quad 1 < q < +\infty \quad \text{tels que :}$$

$$\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s) \geq p(s), \quad \forall s \in [0,1]$$

$$\text{et} \quad \int_0^1 \left(p(s) \right)^{-\frac{q}{2}} ds < +\infty$$

Théorème 2.2. Soit Ψ vérifiant H_1 et H_2 et de plus $\Psi \in N_p^{(0)}[0,1]$
On a les relations suivantes :

$$(2.2.21) \quad e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} - z + 1 - \frac{\tau_0}{\Pi} = \alpha^2 \int_0^1 \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} e^{\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \mu(s; \Psi) \frac{ds}{s - z}$$

(2.2.22.)

 $z \in C - [0,1]$

$$e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} - 1 = \alpha^{-2} \int_0^1 \frac{1 - s^2}{1 - k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} s \Psi(s) \frac{ds}{s - z},$$

(2.2.23.)

où la fonction τ est définie par (2.2.2.), α par (2.2.16.) et où
on a posé :

$$(2.2.24.) \quad \mu(s; \Psi) = \frac{s \Psi(s)}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)}, \quad 0 < s < 1$$

De plus $\mu \in L_q[0,1]$.

Considérons les deux fonctions suivantes de $\tilde{P}$:

$$(2.2.25.) \quad F(z) = 1 - e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)}$$

$$(2.2.26.) \quad G(z) = e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} - 1$$

D'après le théorème 1.5., on a :

$$F_{\theta}^-(z) = \frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\operatorname{Im} F_{\theta}^-(s+i0)}{s - z} ds$$

$$G_{\theta}^+(z) = \frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\operatorname{Im} G_{\theta}^+(s+i0)}{s - z} ds$$

pour chaque $0 < \theta < 1$.

Soit alors la famille des fonctions :

$$\Phi(z; \theta) = (z-1) e^{-\frac{1}{\Pi} \theta (z; \tau)} - z + 1 - \theta \frac{\tau_0}{\Pi}, \quad \text{Im } z > 0$$

qui, lorsque $\theta \rightarrow 1-0$ converge vers le premier membre de (2.2.22.) .

En fonction de $F_{\tilde{\theta}}(z)$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(z; \theta) &= (z-1) \left(1 - F_{\tilde{\theta}}(z) \right) - z + 1 - \theta \frac{\tau_0}{\Pi} \\ &= (1-z) \frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\text{Im } F_{\tilde{\theta}}(s+i0)}{s-z} ds - \theta \frac{\tau_0}{\Pi} \\ &= \frac{1}{\Pi} \int_0^1 (1-s) \frac{\text{Im } F_{\tilde{\theta}}(s+i0)}{s-z} ds \end{aligned}$$

Donc $\Phi(z; \theta) \in \tilde{P}$ pour chaque $0 < \theta < 1$ et est engendré par une mesure absolument continue . D'autre part :

$$\text{Im } F_{\tilde{\theta}}(s+i0) = e^{-\frac{1}{\Pi} \theta \rho_s\{\tau\}} \sin \theta \tau(s), \quad \text{p.p } 0 < s < 1$$

D'après (2.2.19.) :

$$\begin{aligned} (1-s) \text{Im } F_{\tilde{\theta}}(s+i0) &\leq \alpha^{2\theta} \left(\frac{1-k^2 s^2}{1+s} \right)^{\theta} (1-s)^{1-\theta} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} \theta R_s\{\tau\}}}{(\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s))^{\theta/2}} \\ &\leq M \left(p(s) \right)^{-\theta/2} \leq \left(\frac{M}{(p(s))} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse H_2 . et d'après le théorème de Lebesgue :

$$(z-1) e^{-\frac{1}{\Pi} \chi(z; \tau)} - z + 1 - \frac{\tau_0}{\Pi} = \lim_{\theta \rightarrow 1-0} \Phi(z; \theta) = \frac{1}{\Pi} \int_0^1 (1-s) \frac{\text{Im } F(s+i0)}{s-z} ds$$

et $(1-s) \operatorname{Im} F(s+i0) \in L_q[0,1]$. D'après (2.2.19.), cela implique $\mu \in L_q[0,1]$. La relation (2.2.22.) est démontrée.

Soit maintenant :

$$\operatorname{Im} G_{\theta}^*(s+i0) = e^{-\frac{1}{\Pi} \theta \mathcal{P}_s\{\tau\}} \sin \theta \tau(s), \text{ p.p } 0 < s < 1.$$

De (2.2.19.) :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} G_{\theta}^*(s+i0) &\leq \alpha^{-2\theta} \left(\frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} \right)^{\theta} e^{-\frac{1}{\Pi} \theta \mathcal{R}_s\{\tau\}} \left(\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s) \right)^{\theta/2} \\ &\leq M \left((\Pi s \Psi(s))^{\theta} + |\tau(s)|^{\theta} \right) \end{aligned}$$

Si

$$E = \{ s \in [0,1], \quad \Pi s \Psi(s) > 1 \}$$

$$E' = \{ s \in [0,1], \quad |\tau(s)| > 1 \}$$

alors

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^4 E_i \quad \text{avec}$$

$$E_1 = E \cap E'; \quad E_2 = E \cap ([0,1] - E'); \quad E_3 = ([0,1] - E) \cap E'$$

$$E_4 = ([0,1] - E) \cap ([0,1] - E')$$

On a alors :

$$\left(\Pi s \Psi(s) \right)^{\theta} + |\tau(s)|^{\theta} \leq \begin{cases} \Pi s \Psi(s) + |\tau(s)|, & s \in E_1 \\ \Pi s \Psi(s) + 1, & s \in E_2 \\ 1 + |\tau(s)|, & s \in E_3 \\ 2, & s \in E_4 \end{cases}$$

D'après l'hypothèse H_1 , $\tau(s) \in L_p[0,1]$, car on peut aussi écrire :

$$\tau(s) = 1 - 2\Psi_0 + \mathcal{R}_s \{s' \Psi(s')\} + \mathcal{P}_s \{s' \Psi(s')\}$$

Il en résulte que $\operatorname{Im} G_{\theta}^* (s+i0) \rightarrow \operatorname{Im} G (s+i0)$ dans $L [0,1]$
 $\theta \rightarrow 1-0$

fort ; d'où la relation (2.2.23.), compte tenu de (2.2.19.)

Remarque : Les relations (2.2.22.) et (2.2.23.) sont valables sous des conditions plus larges que H_1 et H_2 .

§ 3. Déterminons maintenant la forme nécessaire des solutions dans $N_q \cdot [0,1]$, $q' > 1$ de l'équation (2.1.7.).

Lemme 2.3. Toute fonction $\sigma \in L_q \cdot [0,1]$ avec $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1$

satisfait les relations suivantes :

$$\frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} \frac{e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{ \tau \}}}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)} \left(\mathcal{P}_s \{ \sigma \} \tau(s) + \Pi^2 s \Psi(s) \sigma(s) \right) - \alpha^{-2} \sigma_0 =$$

$$(2.3.1.) \quad \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} \frac{e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{ \tau \}}}{\Pi^2 s'^2 \Psi^2(s') + \tau^2(s')} \left(\sigma(s') \tau(s') - s' \Psi(s') \mathcal{P}_{s'} \{ \sigma \} \right) \right\}$$

$$p.p \quad 0 < s < 1.$$

$$(1 - z) \gamma(z; \sigma) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} - \sigma_0 =$$

$$\alpha^2 \gamma \left(z; \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} \frac{e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{ \tau \}}}{\Pi^2 s'^2 \Psi^2(s') + \tau^2(s')} \left(\sigma(s') \tau(s') - s' \Psi(s') \mathcal{P}_{s'} \{ \sigma \} \right) \right)$$

$$(2.3.2.)$$

$$z \in C - [0,1]$$

où
$$\sigma_n = \int_0^1 s^n \sigma(s) ds, \quad n \geq 0$$

Considérons la fonction suivante :

$$\Phi(z) = (1-z) \gamma(z; \sigma) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} - \sigma_0$$

Montrons qu'elle vérifie la relation (1.1.5.) (Théorème B, Chapitre I).
Elle peut s'écrire, compte tenu de (2.2.25.) :

$$\Phi(z) = (1-z) \gamma(z; \sigma) (1-F(z)) - \sigma_0$$

et d'après (2.2.22.)

$$\Phi(z) = \gamma(z; \sigma) \left\{ -\alpha^2 \gamma\left(z; \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \mu(s; \Psi) \right)^{-z+1-\frac{\tau_0}{\Pi}} \right\} - \sigma_0$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & -\alpha^2 \gamma(z; \sigma) \gamma\left(z; \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \mu(s'; \Psi)\right) \\ & - \gamma\left(z; s' \sigma(s')\right) + \left(1 - \frac{\tau_0}{\Pi}\right) \gamma(z; \sigma) \end{aligned}$$

Chacun des trois termes du second membre vérifie la relation (1.1.5.) :
le premier est dans h_r et les deux derniers dans h_q . La propriété résulte du théorème B. Calculons $\Phi(s+i0)$ d'après son expression initiale. On a :

$$\Phi(s+i0) = (1-s) (\mathcal{P}_s\{\sigma\} + i\Pi \sigma(s)) e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{P}_s\{\tau\} - i\tau(s)} - \sigma_0, \quad p.p. 0 < s < 1$$

(2.3.3.)

$$\Phi(s+i0) = (1-s) \gamma(s; \sigma) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(s; \tau)} - \sigma_0, \quad s < 0 \quad \text{ou} \quad s > 1$$

(2.3.4.) d'où il ressort déjà que $\text{Im } \Phi(s+i0) = 0$ pour $s < 0$ ou $s > 1$

De (2.3.3.), on déduit :

$$\Re \Phi(s+i0) = (1-s) e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{P}_s \{\tau\}} \left\{ \mathcal{P}_s \{\sigma\} \cos \tau(s) + \Pi \sigma(s) \sin \tau(s) \right\} \sigma_0$$

$$\Im \Phi(s+i0) = (1-s) e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{P}_s \{\tau\}} \left\{ \Pi \sigma(s) \cos \tau(s) - \mathcal{P}_s \{\sigma\} \sin \tau(s) \right\}$$

$$p.p \ 0 < s < 1$$

Or, d'après (2.2.2.), on a

$$\sin \tau(s) = \frac{\Pi s \Psi(s)}{\left(\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s) \right)^{1/2}}, \quad 0 < s < 1$$

d'où

$$\Re \Phi(s+i0) = (1-s) \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{P}_s \{\tau\}}}{\left(\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s) \right)^{1/2}} \left\{ \Pi^2 s \Psi(s) \sigma(s) + \mathcal{P}_s \{\sigma\} \tau(s) \right\} \sigma_0$$

$$\Im \Phi(s+i0) = (1-s) \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{P}_s \{\tau\}}}{\left(\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s) \right)^{1/2}} \left\{ \sigma(s) \tau(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s \{\sigma\} \right\}$$

$$p.p \ 0 < s < 1$$

Mais d'après (2.2.5.) et (2.2.19.), on a :

$$(2.3.5.) \quad e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{P}_s \{\tau\}} = \alpha^2 \frac{1 - k^2 s^2}{1 - s^2} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}}}{\left(\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s) \right)^{1/2}}, \quad 0 < s < 1$$

Il en résulte

$$\Re \Phi(s+i0) = \alpha^2 \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}}}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)} \left\{ \Pi^2 s \Psi(s) \sigma(s) + \mathcal{P}_s \{\sigma\} \tau(s) \right\} \sigma_0$$

$$\operatorname{Im} \Phi(s+i0) = \Pi \alpha^2 \frac{1-k^2 s^2}{1-s} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}}}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)} \left\{ \sigma(s) \tau(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s\{\sigma\} \right\}$$

$$p.p \quad 0 < s < 1.$$

D'où (2.3.1.) et (2.3.2.)

$$\begin{aligned} \text{Notons} \\ (2.3.6.) \end{aligned} \quad \lambda(s; \Psi) = \frac{\tau(s)}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)}, \quad 0 < s < 1$$

Lemme 2.4. Soit $S(z)$ un polynôme de degré $n \geq 0$ à coefficients réels. On lui associe le polynôme $\hat{S}(z)$ défini par :

$$(2.3.7.) \quad (1-z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z, \tau)} S(z) - \hat{S}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| > 1$$

Alors les fonctions définies par (2.3.24) et (2.3.6.) vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{1-k^2 s^2}{1+s} S(s) e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \lambda(s; \Psi) - \alpha^{-2} \hat{S}(s) \\ & + \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \mu(s'; \Psi) \right\} = 0 \\ (2.3.8.) \quad & p.p \quad 0 < s < 1 \\ & (1-z) S(z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} - \hat{S}(z) \\ & + \alpha^2 \gamma \left(z; \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \mu(s'; \Psi) \right) = 0 \\ (2.3.9.) \quad & z \in C - [0, 1] \end{aligned}$$

La fonction holomorphe dans $\operatorname{Im} z > 0$, soit :

$$\Phi(z) = (1-z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} S(z) - \hat{S}(z)$$

a les valeurs limites suivantes :

$$\Phi(s+i0) = (1-s) S(s) e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{P}_s\{\tau\} - i \tau(s)} - \hat{S}(s), \text{ p.p } 0 < s < 1.$$

$$\Phi(s+i0) = (1-s) S(s) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(s; \tau)} - \hat{S}(s), \text{ } s < 0 \text{ ou } s > 1.$$

d'où, compte tenu de (2.3.5.) et de la définition de $\tau(s)$:

$$\begin{aligned} \Re \Phi(s+i0) &= \alpha^2 \frac{1 - k^2 s^2}{1+s} S(s) e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \lambda(s; \Psi) - \hat{S}(s) \\ &\text{p.p } 0 < s < 1 \\ \Im \Phi(s+i0) &= -\Pi \alpha^2 \frac{1 - k^2 s^2}{1+s} S(s) e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \mu(s; \Psi) \end{aligned}$$

Montrons que $\Phi \in h_q$ et par conséquent vérifie la relation (1.1.5.) qui s'écrit ici sous la forme (2.3.8.) et (2.3.9.) . Pour $|z| > 1$, on a, d'après la construction même de $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{z^n}$$

de sorte que pour $y \geq y_0 > 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x+iy)|^q dx \leq k$$

où k est indépendant de y .

Pour $0 < y \leq y_0$, écrivons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x+iy)|^q dx = \int_{|x| \geq R} |\Phi(x+iy)|^q dx + \int_{-R}^{+R} |\Phi(x+iy)|^q dx$$

où $R > y_0$. D'après le développement ci-dessus :

$$\int_{|x| \geq R} |\Phi(x+iy)|^q dx \leq k_1, \quad \forall 0 < y \leq y_0$$

D'autre part, de (2.2.22.), on a :

$$\Phi(z) = S(z) \left(1 - z - \frac{\tau_0}{\Pi} \right) - \mathcal{S}(z) - \alpha^2 S(z) \int_0^1 \frac{1-k^2 s^2}{1+s} e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \mu(s; \Psi) \frac{ds}{s-z}$$

De cette expression où l'intégrale qui y figure est dans h_q , on obtient :

$$\int_{-R}^{+R} |\Phi(x+iy)|^q dx \leq k_2, \quad \forall 0 < y \leq y_0$$

Proposition 2.1. Toute fonction $\sigma \in N_q[0,1]$, $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1$ vérifie les relations suivantes :

$$s(1-s) \frac{1-k^2 s^2}{1+s} e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \left\{ \lambda(s; \Psi) \mathcal{P}_s \{\sigma\} + \Pi^2 \sigma(s) \mu(s; \Psi) \right\}$$

$$- \alpha^{-2} \left(\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_1 \hat{S}^{(0)}(s) - \sigma_0 \hat{S}^{(1)}(s) \right) =$$

$$\mathcal{P}_s \left\{ s'(1-s') \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} \frac{\sigma(s') \tau(s') - s' \Psi(s') \mathcal{P}_{s'} \{\sigma\}}{\Pi^2 s'^2 \Psi^2(s') + \tau^2(s')} \right\}$$

(2.3.10.)

$p.p \ 0 < s < 1$

$$z(1-z)^2 \gamma(z; \sigma) e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} - \left(\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_1 \hat{S}^0(z) - \sigma_0 \hat{S}^{(1)}(z) \right) =$$

$$\alpha^2 \gamma \left(z; s'(1-s') \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} \frac{\sigma(s') \tau(s') - s' \Psi(s') \mathcal{P}_{s'} \{\sigma\}}{\Pi^2 s'^2 \Psi^2(s') + \tau^2(s')} \right)$$

(2.3.11.)

$z \in C - [0,1]$

où les polynômes $\hat{S}^0(z)$ et $\hat{S}^1(z)$ sont respectivement associés à $\mathcal{S}(z) = 1$ et $\mathcal{S}(z) = 1 - z$ par (2.3.10.)

La fonction $\hat{\sigma}(s) = s(1-s)\sigma(s)$ est dans $L_q[0,1]$ par définition de l'espace $N_q[0,1]$. Elle vérifie donc la relation (2.3.1.) :

$$\frac{1-k^2 s^2}{1+s} e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \left\{ \mathcal{P}_s \{\hat{\sigma}\} \lambda(s; \Psi) + \Pi^2 \hat{\sigma}(s) \mu(s; \Psi) \right\} - \alpha^{-2} \hat{\sigma}_0 =$$

$$\mathcal{P}_s \left\{ \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} \left(\hat{\sigma}(s') \lambda(s'; \Psi) - \mu(s'; \Psi) \mathcal{P}_{s'} \{\hat{\sigma}\} \right) \right\}$$

(2.3.12.)

$p.p, \ 0 < s < 1.$

Mais on a :

$$\mathcal{P}_s \{\hat{\sigma}\} = (1-s) \mathcal{P}_s \{s' \sigma(s')\} - \sigma_1$$

de sorte que (2.3.12.) devient :

$$\begin{aligned} & (1 - k^2 s^2) \frac{1-s}{1+s} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \left\{ \mathcal{P}_s \{s' \sigma(s')\} \lambda(s; \Psi) + \Pi^2 s \sigma(s) \mu(s; \Psi) \right\} \\ & - \sigma_1 \frac{1 - k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \lambda(s; \Psi) - \alpha^{-2} \hat{\sigma}_0 = \\ & \mathcal{P}_s \left\{ (1 - k^2 s'^2) \frac{1-s'}{1+s} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \left(s' \sigma(s') \lambda(s; \Psi) - \mu(s'; \Psi) \mathcal{P}_s \{\zeta \sigma(\zeta)\} \right) \right\} \\ & + \sigma_1 \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1 - k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \mu(s'; \Psi) \right\} \end{aligned}$$

c'est à dire, compte tenu de (2.3.8.) où on prend $S(z) = 1$ et en notant $\hat{S}^{(0)}(z)$ le polynôme associé par (2.3.7.) :

$$\begin{aligned} & (1 - k^2 s^2) \frac{1-s}{1+s} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \left\{ \mathcal{P}_s \{s' \sigma(s')\} \lambda(s; \Psi) + \Pi^2 s \sigma(s) \mu(s; \Psi) \right\} \\ & - \alpha^{-2} \left(\hat{\sigma}_0 + \sigma_1 \hat{S}^{(0)}(s) \right) \\ & \mathcal{P}_s \left\{ (1 - k^2 s'^2) \frac{1-s'}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \left(s' \sigma(s') \lambda(s'; \Psi) - \mu(s'; \Psi) \mathcal{P}_s \{\zeta \sigma(\zeta)\} \right) \right\} \\ & (2.3.13.) \end{aligned}$$

Ensuite on a : $\mathcal{P}_s \{s' \sigma(s')\} = s \mathcal{P}_s \{\sigma\} + \sigma_0$

de sorte que (2.3.13.) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & (1 - k^2 s^2) \frac{s(1-s)}{1+s} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \left\{ p_s \{\sigma\} \lambda(s; \Psi) + \Pi^2 \sigma(s) \mu(s; \Psi) \right. \\
 & + \sigma_0 (1 - k^2 s^2) \frac{1-s}{1+s} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \lambda(s; \Psi) - \alpha^{-2} \left(\hat{\sigma}_0 + \sigma_1 \hat{S}^{(0)}(s) \right) = \\
 & p_s \left\{ (1 - k^2 s'^2) \frac{s'(1-s')}{1+s'} e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} \left(\sigma(s') \lambda(s'; \Psi) - \mu(s'; \Psi) p_{s'} \{\sigma\} \right) \right\} \\
 & - \sigma_0 p_s \left\{ (1 - k^2 s'^2) \frac{1-s'}{1+s'} \mu(s'; \Psi) \right\} , \text{ p.p. } 0 < s < 1.
 \end{aligned}$$

Compte tenu de (2.3.8.) où on prend $S(z) = 1 - z$ et en notant $\hat{S}^{(1)}(z)$ le polynôme associé par (2.3.7.), on obtient en définitive (2.3.10.). Même démonstration pour (2.3.11.) à partir de (2.3.2.) et compte tenu cette fois de (2.3.9.)

Corollaire. Toute solution $\varphi \in N_q[0,1]$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1$ de l'équation (2.1.7.) est nécessairement de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \varphi(s) = & \alpha^{-2} \frac{1+s}{1-s} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}}}{1 - k^2 s^2} \Psi(s) Q(s) + \frac{\Psi(s) \tau(s)}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)} L(s) \\
 & + \frac{1+s}{1-s} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}}}{1 - k^2 s^2} \Psi(s) p_s \left\{ (1-s') \frac{1 - k^2 s'^2}{1+s'} e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} \mu(s'; \Psi) h(s') \right\} \\
 & (2.3.14.) \qquad \qquad \qquad \text{p.p. } 0 < s < 1.
 \end{aligned}$$

où $Q(s) = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_1 \hat{S}^{(0)}(s) - \varphi_0 \hat{S}^{(1)}(s)$

(2.3.15.)

Car toute solution de (2.1.7.) dans $N_q[0,1]$, s'il en existe, vérifie (2.3.10.), c'est à dire :

$$s(1-s) \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \left\{ \lambda(s; \Psi) \mathcal{P}_s \{\varphi\} + \Pi^2 \varphi(s) \mu(s; \Psi) \right\} \\ - \alpha^{-2} Q(s) = \mathcal{P}_s \left[(1-s') \frac{1 - k^2 s'^2}{1 - s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \mu(s'; \Psi) h(s') \right]$$

Or de (2.1.7.), on a :

$$\mathcal{P}_s \{\varphi\} = \frac{\varphi(s) \tau(s) - \Psi(s) h(s)}{s \Psi(s)}$$

En portant cette expression dans la relation précédente, on obtient facilement (2.3.14.)

Remarque. Les solutions éventuelles de l'équation homogène associée à (2.1.7.) seront données par le terme

$$(2.3.16.) \quad \alpha^{-2} \frac{1 + s}{1 - s} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}}}{1 - k^2 s^2} \Psi(s) Q(s)$$

où les moments $\varphi_i (0 \leq i \leq 2)$ jouent le rôle du paramètre arbitraires.

§ 4. Cherchons maintenant la forme nécessaire des solutions de l'équation (2.1.9.) dans $N_{p'}[0,1]$, $p' > 1$

Lemme 2.5. Toute fonction $\sigma \in L_{p'}^1[0,1]$ avec $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{r} < 1$ vérifie les relations suivantes :

$$\frac{1 - s^2}{1 - k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \left\{ \mathcal{P}_s \{\sigma\} \tau(s) - \Pi^2 s \Psi(s) \sigma(s) \right\} = \\ (2.4.1.) \quad \mathcal{P}_s \left[\frac{1 - s'^2}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \left(\sigma(s') \tau(s') + s' \Psi(s') \mathcal{P}_{s'} \{\sigma\} \right) \right]$$

$$p \cdot p' \quad 0 < s < 1$$

$$\gamma(z; \sigma) e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} = \alpha^{-2} \gamma\left(z; \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2}\right) e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \left(\sigma(s') \tau(s') + s' \Psi(s') P_s\{\sigma\} \right)$$

(2.4.2.)

$$z \in C - [0, 1]$$

Considérons la fonction suivante :

$$\Phi(z) = \gamma(z; \sigma) e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)}$$

Elle est holomorphe dans $\text{Im } z > 0$. Calculons ses valeurs limites lorsque $y \rightarrow +0$:

$$\Phi(s+i0) = \left(P_s\{\sigma\} + i \Pi \sigma(s) \right) e^{\frac{1}{\Pi} P_s\{\tau\} + i \tau(s)}, \quad p.p \quad 0 < s < 1$$

$$\Phi(s+i0) = \gamma(s; \sigma) e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(s; \tau)}, \quad s < 0 \text{ ou } s > 1$$

D'où :

$$\Re \Phi(s+i0) = e^{\frac{1}{\Pi} P_s\{\tau\}} \left\{ P_s\{\sigma\} \cos \tau(s) - \Pi \sigma(s) \sin \tau(s) \right\}$$

$$\text{Im } \Phi(s+i0) = e^{\frac{1}{\Pi} P_s\{\tau\}} \left\{ \Pi \sigma(s) \cos \tau(s) + P_s\{\sigma\} \sin \tau(s) \right\} \quad p.p \quad 0 < s < 1$$

c'est à dire, compte tenu de (2.2.2.) et (2.3.5.):

$$\Re \Phi(s+i0) = \alpha^{-2} \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \left\{ P_s\{\sigma\} \tau(s) - \Pi^2 s \Psi(s) \sigma(s) \right\}$$

$$\text{Im } \Phi(s+i0) = \alpha^{-2} \Pi \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \left\{ \sigma(s) \tau(s) + s \Psi(s) P_s\{\sigma\} \right\}$$

$$p.p \quad 0 < s < 1$$

D'autre part, la fonction Φ vérifie la relation (1.1.5.) ;
en effet compte tenu de (2.2.23.), elle peut s'écrire :

$$\Phi(z) = \gamma(z; \sigma) + \alpha^{-2} \gamma(z; \sigma) \gamma\left(z; \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} s' \Psi(s')\right)$$

Le premier terme est dans h_p , et le second dans h_r . D'où les relations (2.4.1.) et (2.4.2.).

Lemme 2.6. Soit $S(z)$ un polynôme de degré $n \geq 0$ à coefficients réels. On lui associe le polynôme $\tilde{S}(z)$ défini par

$$(2.4.3.) \quad e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} S(z) - \tilde{S}(z) = 0 \left(\frac{1}{z} \right), \quad |z| > 1.$$

Alors la fonction Ψ vérifie avec les polynômes $S(z)$ et $\tilde{S}(z)$ les relations suivantes :

$$\frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} S(s) e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \tau(s) - \alpha^2 \tilde{S}(s) =$$

$$P_s \left\{ \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} s' \Psi(s') \right\}, \quad p.p \quad 0 < s < 1$$

(2.4.4.)

$$e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} S(z) - \tilde{S}(z) = \alpha^{-2} \gamma\left(z; \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} s' \Psi(s')\right)$$

(2.4.5.)

$$z \in C - [0, 1]$$

On utilise ici la fonction holomorphe dans $\text{Im } z > 0$:

$$\Phi(z) = e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} S(z) - \tilde{S}(z)$$

dont les valeurs limites sont :

$$\Phi(s+i0) = e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{P}_s\{\tau\} + i\tau(s)} S(s) - \tilde{S}(s), \quad p.p. \quad 0 < s < 1.$$

$$\Phi(s+i0) = e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(s; \tau)} S(s) - \tilde{S}(s), \quad s < 0 \text{ ou } s > 1$$

d'où, compte tenu de (2.2.2.) et (2.3.5.) :

$$\Re \Phi(s+i0) = \alpha^{-2} \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} S(s) e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \tau(s) - \tilde{S}(s)$$

$$\Im \Phi(s+i0) = \alpha^{-2} \Pi \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} S(s) e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} s \Psi(s), \quad p.p. \quad 0 < s < 1$$

A l'aide de (2.2.23.), on voit, de la même façon qu'au lemme 2.4., que $\Phi \in h_p$: d'où les relations (2.4.4.) et (2.4.5.).

Proposition 2.2. toute fonction $\sigma \in N_{p'}[0,1]$ avec $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} < 1$ vérifie les relations suivantes :

$$\frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} s(1-s) e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \left\{ \mathcal{P}_s\{\sigma\} \tau(s) - \Pi^2 s \Psi(s) \sigma(s) \right\}$$

$$- \alpha^{+2} \left\{ \sigma_1 \tilde{S}^{(0)}(s) + \sigma_0 \tilde{S}^{(1)}(s) \right\} =$$

$$\mathcal{P}_s \left\{ \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} s'(1-s') e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \left(\sigma(s') \tau(s') + s' \Psi(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma\} \right) \right\},$$

(2.4.6.)

p.p. $0 < s < 1$

$$\gamma(z; \sigma) = z(1-z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} - \left(\sigma_1 \tilde{S}^{(0)}(z) + \sigma_0 \tilde{S}^{(1)}(z) \right) =$$

$$\alpha^{-2} \gamma \left(z; \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} s'(1-s') e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \left[\sigma(s') \tau(s') + s' \Psi(s') \mathcal{P}_{s'}\{\sigma\} \right] \right)$$

(2.4.7.)

$z \in C - [0,1]$

où les polynômes $\tilde{S}^{(0)}(z)$ et $\tilde{S}^{(1)}(z)$ sont respectivement associés à $S(z) = 1$ et $S(z) = 1 - z$ par (2.4.3.)

La fonction $\hat{\sigma}(s) = s(1-s)\sigma(s)$ est dans $Lp^+[0,1]$ avec $\frac{1}{p^+} + \frac{1}{p^-} < 1$,

donc vérifie (2.4.1.) :

$$\frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} P_s\{\hat{\sigma}\} \tau(s) - \Pi^2 s \Psi(s) \hat{\sigma}(s) =$$

$$P_s \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \left(\hat{\sigma}(s') \tau(s') + s' \Psi(s') P_s\{\hat{\sigma}\} \right),$$

$$p.p \ 0 < s < 1$$

qui devient, en écrivant $P_s\{\hat{\sigma}\} = (1-s) P_s\{s' \sigma(s')\} - \sigma_1$, et compte tenu de (2.4.4.) où $S(z) = 1$ et en notant $\tilde{S}^{(0)}(z)$ le polynôme associé par (2.4.3.) :

$$\frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} (1-s) e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} P_s\{s' \sigma(s')\} \tau(s) - \Pi^2 s \Psi(s) s \sigma(s)$$

$$= \alpha^2 \sigma_1 \tilde{S}^{(0)}(s) = P_s \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} (1-s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \left(s' \sigma(s') \tau(s') + s' \Psi(s') P_s\{s \sigma(s)\} \right)$$

Ensuite de $P_s\{s' \sigma(s')\} = s P_s\{\sigma\} + \sigma_0$ et en utilisant encore une fois (2.4.4.) où $S(z) = 1 - z$ et en notant $\tilde{S}^{(1)}(z)$ le polynôme associé par (2.4.3.) on obtient (2.4.6.) . Même démonstration pour (2.4.7.) à partir de (2.4.2.) et en utilisant (2.4.5.)

Corollaire Toute solution $\chi \in Np^+[0,1]$, $p^+ > 1$ avec $\frac{1}{p^+} + \frac{1}{p^-} = \frac{1}{r} < 1$ de l'équation (2.1.9.) est nécessairement de la forme suivante :

$$\chi(s) = -\alpha^2 \left(\chi_1 \tilde{S}^{(0)}(s) + \chi_0 \tilde{S}^{(1)}(s) \right) \frac{1 - k^2 s^2}{1 - s^2} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}}}{s(1-s)} \mu(s; \Psi)$$

$$+ \mu(s; \Psi) \tau(s) g(s)$$

$$= \frac{1 - k^2 s^2}{1 - s^2} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}}}{s(1-s)} \mu(s; \Psi) \mathcal{P}_s \frac{1 - s'^2}{1 - k^2 s'^2} s'(1-s')$$

$$e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} s' \Psi(s') g(s')$$

(2.4.8.)

Car toute solution de (2.1.9.) dans $N_{p'}[0,1]$ avec $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{r} < 1$

vérifie (2.4.6.), c'est à dire :

$$\frac{1 - s^2}{1 - k^2 s^2} s(1-s) e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \mathcal{P}_s \{\chi\} \tau(s) - \Pi^2 s \Psi(s) \chi(s)$$

$$= \alpha^2 \chi_1 \tilde{S}^{(0)}(s) + \chi_0 \tilde{S}^{(1)}(s) =$$

$$\mathcal{P}_s \frac{1 - s'^2}{1 - k^2 s'^2} s'(1-s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} s' \Psi(s') g(s')$$

Or de (2.1.9.) on a :

$$\mathcal{P}_s \{\chi\} = \frac{s \Psi(s) g(s) - \chi(s) \tau(s)}{s \Psi(s)}$$

En portant cette expression dans la relation précédente, on obtient (2.4.8.)

Remarque : Les solutions éventuelles non nulles de l'équation homogène associée à (2.1.9.) seront données par le terme

$$(2.4.9.) \quad \alpha^2 \left(\chi_1 \tilde{S}^0(s) + \chi_0 \tilde{S}^{(1)}(s) \right) \frac{1 - \kappa^2 s^2}{1 - s^2} \frac{e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}}}{s(1-s)} \mu(s; \Psi)$$

où les moments χ_i ($0 \leq i$) jouent le rôle de paramètres arbitraires.

§ 5. Avant de passer à la résolution des équations (2.1.7.) et (2.1.9.), démontrons deux lemmes qui seront utiles dans toute la suite.

Lemme 2.7. On a les résultats suivants :

$$1) \text{ les fonctions } s \rightarrow \frac{\mu(s; \Psi)}{s} \text{ et } s \rightarrow \frac{\mu(s; \Psi)}{1-s}$$

sont dans $L[0,1]$, d'où il résulte qu'elles sont respectivement dans $N_q^{(0)}[0,1]$ et $N_q^{(1)}[0,1]$.

2) Elles vérifient les relations suivantes :

$$\frac{1 - \kappa^2 s^2}{1 + s} S(s) e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \frac{\lambda(s; \Psi)}{s} - \frac{\alpha^{-1} S(0)}{s} + \alpha^{-2} \frac{\hat{S}(0) - \hat{S}(s)}{s}$$

$$(2.5.1.) \quad + \mathcal{P}_s \frac{1 - \kappa^2 s'^2}{1 + s'} S(s') e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'} = 0$$

$$p.p \ 0 < s < 1$$

$$\frac{(1-z) S(z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)}}{z} - \frac{\alpha S(0)}{z} + \frac{\hat{S}(0) - \hat{S}(z)}{z}$$

$$+ \alpha^2 \gamma \left(z; \frac{1 - \kappa^2 s'^2}{1 + s'} S(s') e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'} \right) = 0$$

$$(2.5.2.)$$

$$z \in C - [0,1]$$

$$\frac{1 - k^2 s^2}{1 - s^2} S(s) e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \lambda(s; \Psi) - \alpha^{-2} \frac{A S(1)}{1 - s} + \alpha^{-2} \frac{\hat{S}(1) - \hat{S}(s)}{1 - s} \\ + p_s \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{1 - s'} = 0$$

(2.5.3.)

$p \cdot p \quad 0 < s < 1$

$$S(z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} - \frac{A S(1)}{1 - z} + \frac{\hat{S}(1) - \hat{S}(z)}{1 - z}$$

$$(2.5.4.) \quad + \alpha^2 \gamma\left(z; \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{1 - s'}\right) = 0$$

$z \in C - [0, 1]$

$$S(0) \alpha - \hat{S}(0) + \alpha^2 \int_0^1 \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'} ds' = 0$$

(2.5.5.)

$$S(1) A - \hat{S}(1) - \alpha^2 \int_0^1 \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{1 - s'} ds' = 0$$

(2.5.6.)

$$\text{où} \\ \lim_{(1-z)} (1-z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} = A = \alpha^2 \frac{1 - k^2}{2} e^{-\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds} \frac{1}{T(1+0)}$$

(2.5.7.) $z > 1, \quad z \rightarrow 1+0$

Le polynôme $\hat{S}(z)$ étant défini à partir du polynôme $S(z)$ par
(2.3.1.)

Ce lemme est une conséquence du lemme 2.4. Considérons la relation (2.3.9.) dans laquelle nous prenons $S(s) = 1$. Faisons $z = i\xi$, $\xi \rightarrow +0$. On a :

$$(2.5.8.) \quad \lim_{z = i\xi, \xi \rightarrow +0} (1 - z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} = \alpha$$

$$(2.5.9.) \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{s - i\xi} = \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{s}, \text{ p.p. } 0 < s < 1$$

La fonction $(1 - z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} = \hat{S}^{(0)}(z)$ ayant une limite lorsque $z = i\xi$, $\xi \rightarrow +0$, l'intégrale figurant dans (2.3.9.) en a une également et le lemme de Fatou appliqué respectivement aux parties réelles et imaginaires du premier membre de (2.5.9.) implique que le second membre de cette relation est sommable, donc que la fonction $s \rightarrow \frac{\mu(s; \Psi)}{s}$ est sommable. Puisque $\mu(s; \Psi)$

appartient à $L_q[0,1]$, la fonction ci-dessus est bien dans $N_q^{(0)}[0,1]$.

Faisons maintenant $z > 1$, $z \rightarrow 1+0$ dans (2.3.9.). D'après (2.2.18), on a :

$$e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} = \alpha^2 \frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}}}{T(z)}$$

d'où (2.5.7.) où $A = 0$ si $k^2 = 1$ ou si $T(1+0) = -\infty$. Par le même raisonnement que ci-dessus, on voit que la fonction $s \rightarrow \frac{\mu(s; \Psi)}{1 - s}$

est sommable, donc dans $N_q^{(1)}[0,1]$.

Laissons maintenant $S(s)$ quelconque dans (2.3.9.) Faisons successivement $z = i\xi$, $\xi \rightarrow +0$ et $z > 1$, $z \rightarrow 1+0$: le théorème de Lebesgue entraîne alors les égalités (2.5.5.) et (2.5.6.). Il en résulte facilement (2.5.1.) et (2.5.2.) à partir de (2.3.8), (2.3.9.) compte tenu de

(2.5.5.) et de même (2.5.3.) , (2.5.4.) à partir toujours de (2.3.8.)
(2.3.9.) compte tenu de (2.5.6.).

Lemme 2.8. Les relations suivantes sont valables :

$$(2.5.10) \quad \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} S(s) e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\tau(s)}{s} - \frac{\alpha S(0)}{s} + \alpha^2 \frac{\tilde{S}(0) - \tilde{S}(s)}{s} = \right. \\ \left. \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \Psi(s') \right\}, p.p \quad 0 < s < 1$$

$$(2.5.11.) \quad e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} \frac{S(z)}{z} - \frac{\alpha^{-1} S(0)}{z} + \frac{\tilde{S}(0) - \tilde{S}(z)}{z} = \\ \alpha^{-2} \gamma \left(z; \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \Psi(s') \right)$$

$$z \in C - [0,1]$$

$$\frac{1+s}{1-k^2 s^2} S(s) e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\tau(s)}{s} - \frac{\alpha^2 A' S(1)}{1-s} + \alpha^2 \frac{\tilde{S}(1) - \tilde{S}(s)}{1-s} =$$

$$(2.5.12.) \quad \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1+s'}{1-k^2 s'^2} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} s' \Psi(s') \right\}, p.p \quad 0 < s < 1$$

$$e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} \frac{S(z)}{1-z} - \frac{A' S(1)}{1-z} + \frac{\tilde{S}(1) - \tilde{S}(z)}{1-z} =$$

$$(2.5.13.) \quad \alpha^{-2} \gamma \left(z; \frac{1+s'}{1-k^2 s'^2} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} s' \Psi(s') \right) \\ z \in C - [0,1]$$

$$\alpha^{-1} S(0) - \tilde{S}(0) = \alpha^{-2} \int_0^1 \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \Psi(s') ds'$$

(2.5.14.)

$$A' S(1) - \tilde{S}(1) = -\alpha^{-2} \int_0^1 \frac{1+s'}{1-k^2 s'^2} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} s' \Psi(s') ds'$$

(2.5.15.)

$$\lim_{z \rightarrow 1, z \rightarrow 1+0} \frac{\text{où}}{e} \frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau) = A' = \begin{cases} 0 & \text{si } k^2 \neq 1 \\ \alpha^{-2} T(1+0) e^{-\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds} & \text{si } k^2 = 1 \end{cases}$$

(2.5.16.)

Le polynôme $\tilde{S}(z)$ étant défini à partir du polynôme $S(z)$ par
(2.4.3.)

Ce lemme est une conséquence du lemme 2.6. Considérons la relation (2.4.5.). Faisons $z = i\xi$, $\xi \rightarrow +0$: d'après le théorème de Lebesgue on a tout de suite (2.5.14.) qui permet d'obtenir (2.5.10) et (2.5.11.) respectivement à partir de (2.4.4.) et (2.4.5.). Faisons maintenant $z > 1$, $z \rightarrow 1+0$ dans (2.4.5.). Montrons d'abord (2.5.16.). D'après (2.2.18.), on a

$$e \frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau) = \alpha^{-2} \frac{1-z^2}{1-k^2 z^2} T(z) e^{-\frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}}$$

$$\text{Or : } (1-z) T(z) = (1-z) (1-2\Psi_0) + R_z \{s' (1+s') \Psi(s')\} \\ + \gamma(z; s' (1-s') \Psi(s'))$$

de la définition (2.2.1.) ; le théorème de Lebesgue implique :

$$\lim_{z > 1, z \rightarrow 1+0} R_z \{s' (1 + s') \Psi(s')\} = \Psi_1$$

$$\lim_{z > 1, z \rightarrow 1+0} \gamma \left(z; s'(1 - s') \Psi(s') \right) = -\Psi_1$$

Il en résulte que $\lim_{z > 1, z \rightarrow 1+0} (1 - z) T(z) = 0$, donc $A' = 0$ dans

le cas $k^2 \neq 1$. Lorsque $k^2 = 1$, alors nécessairement $T(1 + 0) > 0$, cette quantité étant finie, d'où la valeur indiquée de A' . A partir de là, on voit tout de suite que (2.4.5.) devient (2.5.15.) à la limite lorsque $z > 1, z \rightarrow 1+0$, (toujours d'après le théorème de Lebesgue) d'où (2.5.12) et (2.5.13.) obtenues respectivement à partir de (2.4.4.) et (2.4.5.), compte tenu de (2.5.15.)

§ 6. Résolution des équations homogènes

$$(2.6.1.) \quad \tau(s) \varphi(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s\{\varphi\} = 0 \quad ; \quad 0 < s < 1$$

$$(2.6.2.) \quad \tau(s) \chi(s) + s \Psi(s) \mathcal{P}_s\{\chi\} = 0$$

Théorème 2.3. L'équation (2.6.1.) possède au plus une solution non nulle (à un facteur constant près) dans $N_p[0,1]$.
Lorsque $k^2 \neq 1$, elle en a effectivement une, soit

$$(2.6.3.) \quad u(s) = \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} s \Psi(s) \quad \text{dans } L_p[0,1].$$

Lorsque $k^2 = 1$, elle n'a que la solution zéro.

L'équation (2.6.2.) n'a, dans tous les cas que la solution zéro dans $N_q[0,1]$

Traisons d'abord le cas de l'équation (2.6.1.). La forme nécessaire de ses solutions non nulles est donnée par (2.3.16.) qu'on rappelle

$$\frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\Psi(s)}{1-s} = Q(s)$$

où $Q(s)$ est un polynôme de degré au plus égal à deux, d'après (2.3.15.)
Pour que cette fonction soit sommable, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

$$\begin{aligned} i) \quad & Q(1) = 0 \\ ii) \quad & a) \text{ si } k^2 \neq 1, \quad \int_0^1 \frac{\Psi(s)}{1-s} ds < +\infty \\ & b) \text{ si } k^2 = 1, \quad \int_0^1 \frac{\Psi(s)}{(1-s)^2} ds < +\infty \end{aligned}$$

D'autre part, l'addition membre à membre des relations (2.5.11.) et (2.5.13.) fournit l'égalité :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{\Pi} \chi(z; \tau)} \frac{S(z)}{z(1-z)} &= \frac{\alpha^{-1} S(0)}{z} - \frac{A' S(1)}{1-z} + \frac{\tilde{S}(0) - \tilde{S}(z)}{z} \\ + \frac{\tilde{S}(1) - \tilde{S}(z)}{1-z} &= \alpha^{-2} \chi \left(z; \frac{1+s'}{1-k^2 s'^2} S(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s', \{\tau\}}} \Psi(s') \right) \end{aligned}$$

(2.6.4.)

$$z \in C - [0, 1]$$

Prenons $S(z) = Q(z)$ dans cette égalité. Alors $\tilde{S}(z) = \tilde{Q}(z)$ est au plus de degré deux. Faisons $z > 1$, $z \rightarrow 1+0$ dans (2.6.4.). Sous l'une des hypothèses i) ou ii) le second membre tend vers l'intégrale :

$$- \alpha^{-2} \int_0^1 \frac{1+s'}{1-k^2 s'^2} Q(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s', \{\tau\}}} \frac{\Psi(s')}{1-s'} ds'$$

en vertu du théorème de Lebesgue. Regardons ce que devient le premier membre. D'après (2.2.18.), on a :

$$(2.6.5.) \quad \frac{e^{\frac{1}{\Pi} \chi(z; \tau)}}{z(1-z)} = \alpha^{-2} \frac{1+z}{1-k^2 z^2} \frac{T(z)}{z} - \frac{1}{e} \frac{1}{\Pi} R_z \{\tau\}$$

i) $Q(1) = 0$. D'après (2.6.5.), on voit que :

$$\lim_{z < 1, z \rightarrow 1+0} \frac{e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)}}{z(1-z)} Q(z) = -Q'(1) A'$$

de sorte que le premier membre de (2.6.4.) converge vers :

$$-A' Q'(1) - \alpha^{-1} Q(0) + \tilde{Q}(0) - \tilde{Q}(1) + \tilde{Q}'(1) \quad (2.6.6.)$$

ii) a) $k^2 \neq 1$. Alors

$$\lim_{z > 1, z \rightarrow 1+0} \frac{e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)}}{z(1-z)} Q(z) = Q(1) \alpha^{-2} \frac{2}{1-k^2} T(1+0) e^{-\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds}$$

de sorte que le premier membre de (2.6.4.) tend vers :

$$\alpha^{-2} \frac{2}{1-k^2} T(1+0) e^{-\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds} Q(1) - \alpha^{-1} Q(0) + \tilde{Q}(0) - \tilde{Q}(1) + \tilde{Q}'(1) \quad (2.6.7.)$$

b) $k^2 = 1$ (Nécessairement $\int_0^1 \frac{\Psi(s)}{1-s} ds < +\infty$)

Il s'agit de déterminer la limite de la différence :

$$D(z) = e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} \frac{Q(z)}{z(1-z)} - \frac{A' Q(1)}{1-z}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 D(z) = & \frac{Q(z) - Q(1)}{1-z} \alpha^{-2} \frac{T(z)}{z} e^{-\frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}} \\
 + & Q(1) \alpha^{-2} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}}}{z} \frac{T(z) - T(1+0)}{1-z} \\
 + & \alpha^{-2} T(1+0) \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}}}{z^{-1} e^{-\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds}} \frac{1}{1-z}
 \end{aligned}$$

compte tenu de (2.6.5.). Or on a facilement à partir de (2.2.1.)

$$T(z) - T(1+0) = (1-z) \left[R_z \frac{s' \Psi(s')}{1+s'} + \gamma \left(z; \frac{s' \Psi(s')}{1-s'} \right) \right]$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}
 D(1+0) = & -Q'(1) A' + Q(1) \left\{ \int_0^1 \frac{s' \Psi(s')}{(1+s')^2} ds' - \int_0^1 \frac{s' \Psi(s')}{(1-s')^2} ds' \right. \\
 (2.6.8.) & \left. + \left(\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{(1+s)^2} ds - 1 \right) T(1+0) \right\} \alpha^{-2} e^{-\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds}
 \end{aligned}$$

Le premier membre de (2.6.4.) tend donc vers

$$D(1+0) = \alpha^{-1} Q(0) + \tilde{Q}(0) - \tilde{Q}(1) + \hat{Q}(1) \quad (2.6.9.)$$

Dans tous les cas, on a ainsi à la limite pour (2.6.4.) :

$$B' - \alpha^{-1} Q(0) + \tilde{Q}(0) - \tilde{Q}(1) + \tilde{Q}'(1) =$$

$$- \alpha^{-2} \int_0^1 \frac{1+s'}{1-k^2 s'^2} Q(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\Psi(s')}{1-s'} ds'$$

(2.6.10.)

où la quantité B' est défini par (2.6.6.), (2.6.7.) ou (2.6.9.) suivant que i), ia) ou ib) est réalisée. Par addition membre à membre de (2.5.10.) et (2.5.12.) où $S(s) = Q(s)$ et compte tenu de (2.6.10.) on a enfin :

$$\begin{aligned} & \frac{1+s}{1-k^2 s^2} Q(s) e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} - \frac{\tau(s)}{s(1-s)} - \frac{\alpha Q(0)}{s} - \frac{\alpha^2 A' Q(1)}{(1-s)^2} - \frac{\alpha^2 B'}{1-s} \\ & + \frac{\alpha^2}{1-s} \left\{ \frac{\tilde{Q}(0) - \tilde{Q}(s)}{s} - (\tilde{Q}(0) - \tilde{Q}(1)) \right\} \\ & + \frac{\alpha^2}{1-s} \left\{ \frac{\tilde{Q}(1) - \tilde{Q}(s)}{1-s} - \tilde{Q}'(1) \right\} = P_s \left\{ \frac{1+s'}{1-k^2 s'^2} Q(s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\Psi(s')}{1-s'} \right\} \end{aligned}$$

$$0 < s < 1.$$

Il est facile de voir que

$$\frac{1}{1-s} \left\{ \frac{\tilde{Q}(0) - \tilde{Q}(s)}{s} - (\tilde{Q}(0) - \tilde{Q}(1)) \right\} + \frac{1}{1-s} \left\{ \frac{\tilde{Q}(1) - \tilde{Q}(s)}{1-s} - \tilde{Q}'(1) \right\} = 0$$

identiquement puisque $\tilde{Q}(s) = s^2 + as + b$

On en déduit que la fonction $s \rightarrow \frac{1+s}{1-k^2 s^2} Q(s) e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} = \frac{\Psi(s)}{1-s}$

est solution de l'équation (2.6.1.) si, et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

$$(2.6.11.) \quad Q(0) = 0$$

$$(2.6.12.) \quad A' Q(1) = 0$$

$$(2.6.13.) \quad B' = 0$$

i) D'après (2.6.6.) $B' = -A' Q'(1)$, de sorte que si $k^2 \neq 1$ on a les deux conditions $Q(0) = 0$ et $Q(1) = 0$ (car $A' = 0$) donc $Q(s) = s(1-s)$ à un facteur près, d'où la solution (2.6.3.) et si $k^2 = 1$ alors $A' \neq 0$ et (2.6.12.) entraînent $Q'(1) = 0$ c'est à dire $Q(s) = 0$.

$$ii) \text{ Dans le cas } a), \quad B' = \alpha^{-2} \frac{2}{1-k^2} T(1+0) e^{-\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds} Q(1)$$

d'où les seules conditions $Q(0) = 0$ et $Q(1) = 0$ et dans le cas b) (2.6.12.), (2.6.13.) et (2.6.8.) entraînent en supplément $Q'(1) = 0$, donc $Q(s) = 0$.

La première partie est démontrée. Passons à l'équation (2.6.2.) La forme nécessaire des solutions de cette équation est donnée par (2.4.9.), soit :

$$\frac{1-k^2 s^2}{1-s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} = \frac{\mu(s; \Psi)}{s(1-s)} Q(s)$$

où $Q(s)$ est un polynôme de degré un au plus. L'addition membre à membre de (2.5.2.) et (2.5.4.) fournit l'égalité :

$$\frac{S(z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)}}{z} - \frac{A S(0)}{z} - \frac{A S(1)}{1-z} + \frac{\hat{S}(0) - \hat{S}(z)}{z} + \frac{\hat{S}(1) - \hat{S}(z)}{1-z} + \alpha^2 \gamma \left(z; \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} S(s') e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{ \tau \}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} \right) = 0$$

(2.6.14*)

$z \in C - [0, 1]$

Prenons $S(z) = Q(z)$ dans (2.6.14*) et faisons $z > 1, z \rightarrow 1+0$.
D'après (2.2.18*) :

$$e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} = \alpha^2 \frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2} \frac{e^{\frac{1}{\Pi} R_z \{ \tau \}}}{T(z)}$$

Il s'agit de calculer la limite suivante :

$$B = \lim_{z > 1, z \rightarrow 1+0} \left\{ \frac{Q(z)}{z} e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} - \frac{A Q(1)}{1-z} \right\}$$

Soit d'abord $A \neq 0$ c'est à dire d'après (2.5.7.) $-\infty < T(1+0) < 0$

$$\begin{aligned} \frac{Q(z)}{z} e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} - \frac{A Q(1)}{1-z} &= \frac{Q(z) - Q(1)}{1-z} \frac{(1-z)}{z} e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} \\ &+ Q(1) \left\{ \frac{\alpha^2}{(1-z) T(z)} \left[\frac{1 - k^2 z^2}{z(1+z)} e^{\frac{1}{\Pi} R_z \{ \tau \}} - \frac{1 - k^2}{2} e^{\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds} \right] \right. \\ &\left. + \alpha^2 \frac{(1 - k^2)}{z} e^{\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds} \frac{T(1+0) - T(z)}{1-z} \frac{1}{T(1+0) T(z)} \right\} \end{aligned}$$

d'où compte tenu de

$$T(z) - T(1+0) = (1-z) \left\{ R_z \left\{ \frac{s' \Psi(s')}{1+s'} \right\} + \gamma \left(z; \frac{s' \Psi(s')}{1-s'} \right) \right\}$$

et de (2.5.7.) :

$$\text{Si } \int_0^1 \frac{\Psi(s)}{(1-s)^2} ds = +\infty$$

(2.6.15.) B est fini si et seulement si $Q(1) = 0$, d'où $B = -AQ'(1)$

$$\text{si } \int_0^1 \frac{\psi(s)}{(1-s)^2} ds < +\infty$$

$$B = -Q'(1)A + \left[\frac{\alpha^2}{T(1+0)} e^{\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds} \left(\frac{3+k^2}{4} + \frac{1-k^2}{2\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{(1+s)^2} ds \right) \right]$$

$$+ \alpha^2 \frac{1-k^2}{2} e^{\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds} \left(\int_0^1 \frac{s' \Psi(s')}{(1+s')^2} ds' - \int_0^1 \frac{s' \Psi(s')}{(1-s')^2} ds' \right) \Big| Q(1)$$

ou aussi

$$B = A \left[-Q'(1) + Q(1) \left[\frac{1}{2} - \frac{3+k^2}{1-k^2} + \frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{(1+s)^2} ds \right] \right]$$

$$(2.6.16.) \quad - \frac{4}{T(1+0)} \int_0^1 \frac{s'^2 \Psi(s')}{(1-s'^2)^2} ds' \Big|$$

Lorsque $A = 0$, deux cas :

Premier cas : $T(1+0) = -\infty$; Alors B est fini si

et seulement si : $Q(1) = 0$ car $(1-z)T(z) \rightarrow 0$, donc (2.6.17.) $B = 0$

Second cas $k^2 = 1$; alors

$$(2.6.18.) \quad B = \alpha^2 e^{\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds} \frac{Q(1)}{T(1+0)}$$

Dans tous les cas où B est finie, la relation (2.6.14.) devient à la limite lorsque $z > 1$, $z \rightarrow 1+0$:

$$B - \alpha Q(0) + \hat{Q}(0) - \hat{Q}(1) + \hat{Q}'(1) =$$

$$(2.6.19.) \quad \alpha^2 \int_0^1 \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} \frac{Q(s')}{1 - s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} ds' =$$

Par addition de (2.5.1.) et (2.5.3.) et compte tenu de (2.6.19.), on obtient facilement :

$$\begin{aligned} & \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} \frac{Q(s)}{1 - s} e^{\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\lambda(s; \Psi)}{s(1 - s)} - \alpha^{-1} \frac{Q(0)}{s} - \frac{\alpha^{-2} B}{1 - s} - \frac{A Q(1)}{(1 - s)^2} \\ & + \frac{\alpha^{-2}}{1 - s} \left\{ \frac{\hat{Q}(0) - \hat{Q}(s)}{s} - \left(\hat{Q}(0) - \hat{Q}(1) \right) + \frac{\hat{Q}(1) - \hat{Q}(s)}{1 - s} - \hat{Q}'(1) \right\} \\ & + P_s \left\{ \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} \frac{Q(s')}{1 - s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$0 < s < 1$

D'où il résulte que la fonction $s \rightarrow \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} \frac{Q(s)}{1 - s} e^{\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{s(1 - s)}$

est solution de l'équation (2.6.2.) si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

$$(2.6.20.) \quad Q(0) = 0$$

$$(2.6.21.) \quad B = 0$$

$$(2.6.22.) \quad A Q(1) = 0$$

Si $A \neq 0$, alors (2.6.20) et (2.6.22.) entraînent $Q(s) \equiv 0$.

Si $A = 0$, (2.6.21.) entraîne $Q(1) = 0$ d'après (2.6.17.) et (2.6.18.) d'où le même résultat. L'équation (2.6.2.) n'a donc que la solution zéro.

§ 7. Voyons maintenant dans quelles conditions les équations (2.1.7.) et (2.1.9.) possèdent des solutions. Rappelons ces équations :

$$(2.7.1.) \quad \tau(s)\varphi(s) - s\Psi(s) \mathcal{P}_s\{\varphi\} = \Psi(s) h(s) \quad ; \quad 0 < s < 1.$$

$$(2.7.2.) \quad \tau(s)\chi(s) + s\Psi(s) \mathcal{P}_s\{\chi\} = s\Psi(s) g(s)$$

La forme nécessaire (mais non suffisante à priori) des solutions de (2.7.1.) est donnée par (2.3.14.), c'est à dire en laissant de côté le premier terme indépendant de h : (ceci pour des raisons de simplification dans les calculs qui vont suivre)

$$\varphi_0(s) = \frac{\Psi(s) \tau(s) h(s)}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)} + \frac{1+s}{1-s} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \Psi(s) X$$

$$\mathcal{P}_s \left\{ \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} (1 - s') e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \mu(s'; \Psi) h(s') \right\}$$

Puisque la fonction $s \rightarrow (1-s)^{-1} \Psi(s)$ n'est, en général, pas sommable, on n'étudiera pas φ_0 mais la fonction suivante :

$$\varphi_1(s) = \frac{\Psi(s) \tau(s) h(s)}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)} + \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \Psi(s) X$$

$$(2.7.3.) \quad \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \mu(s'; \Psi) h(s') \right\}$$

obtenue de φ_0 en laissant de côté le terme

$$- \frac{1+s}{1-s} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}}}{1-k^2 s^2} \Psi(s) \int_0^1 \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} \mu(s'; \Psi) h(s') ds'$$

qui est du même type que le terme déjà abandonné.

De la même façon, la forme nécessaire des solutions de l'équation (2.7.2.) est donnée par (2.4.8.), c'est à dire en laissant de côté le premier terme indépendant de g :

$$\chi_0(s) = \mu(s; \Psi) \tau(s) g(s) - \frac{1-k^2 s^2}{1-s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{s(1-s)} X$$

$$P_s \left\{ \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} s'(1-s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} s' \Psi(s') g(s') \right\}$$

La fonction $s \rightarrow s^{-1}(1-s)^{-2} \mu(s; \Psi)$ n'étant pas sommable en général, on considérera la fonction suivante :

$$\chi_1(s) = \mu(s; \Psi) \tau(s) g(s) - \frac{1-k^2 s^2}{1+s} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{s(1-s)} X$$

$$(2.7.4.) \quad P_s \left\{ \frac{1+s'}{1-k^2 s'^2} s'(1-s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} s' \Psi(s') g(s') \right\}$$

obtenue de χ_0 en laissant de côté le terme :

$$\frac{1-k^2 s^2}{1-s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{s(1-s)} \int_0^1 \frac{1+s'}{1-k^2 s'^2} s'(1-s') e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'} \{\tau\}} s' \Psi(s') g(s') ds'$$

Théorème 2.4. Soit Ψ vérifiant H_1 et H_2 et soit p tel que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1.$$

Si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

$$\begin{array}{ll} i) \Psi \in N_p^{(0)}[0,1] & \text{avec } \frac{1}{\hat{q}} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q'} < 1 \\ h \in n_{\hat{q}}^{(0)}[0,1] & \end{array} \quad \begin{array}{l} ii) \Psi \in L_p[0,1] \\ h \in L_{\infty}[0,1] \end{array}$$

alors l'équation

$$\tau(s) \varphi(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s\{\Psi\} = \Psi(s) h(s), \quad 0 < s < 1$$

possède la solution particulière suivante :

Si $k^2 \neq 1$:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(s) &= \frac{\Psi(s) \tau(s)}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)} h(s) \\ (2.7.5.) \quad &+ \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} s \Psi(s) \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{s'} h(s') \right\} \\ &0 < s < 1 \end{aligned}$$

Si $k^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_2(s) &= \frac{\Psi(s) \tau(s)}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)} h(s) \\ (2.7.6.) \quad &+ e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} s \Psi(s) \mathcal{P}_s \left\{ e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'} h(s') \right\} \\ &0 < s < 1 \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation ci-dessus peut s'écrire :

$$(2.7.7.) \quad \varphi(s) = C_1 \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} s \Psi(s) + \hat{\varphi}_i(s), \quad (i=1,2)$$

où C_1 est réel quelconque ($k^2 \neq 1$) et $C_2 = 0$ ($k^2 = 1$)

La solution $\hat{\varphi}_1$ est respectivement dans $N_q^{(0)}[0,1]$, $L_r[0,1]$ et la solution $\hat{\varphi}_2$ respectivement dans $N_q[0,1]$, $N_q^{(1)}[0,1]$ suivant qu'on est placé dans les cas $i)$ ou $ii)$.

Considérons la fonction (2.7.3.) qu'on peut écrire sous la forme abrégée :

$$\varphi_1(s) = \mu(s; \Psi) \tau(s) \frac{h(s)}{s} + \hat{\varphi}(s)$$

Le premier terme est dans $L_q^{\hat{}}[0,1]$ dans le cas i) et dans $L_r[0,1]$ dans le cas ii), car on a :

$$\left| \mu(s; \Psi) \tau(s) \frac{h(s)}{s} \right| \leq \frac{1}{2\Pi} \left| \frac{h(s)}{s} \right|$$

$$\left| \mu(s; \Psi) \tau(s) \frac{h(s)}{s} \right| \leq \frac{\Psi(s) |h(s)|}{(\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s))^{1/2}} \leq \frac{\Psi(s) |h(s)|}{\sqrt{p}(s)}$$

D'autre part, la fonction $s \rightarrow \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \Psi(s)$ est dans

$N_p^{(0)}[0,1]$ dans le premier cas et dans $L_p[0,1]$ dans le second, chaque fois que $k^2 \neq 1$. Lorsque $k^2 = 1$, alors nécessairement $(1-s)^{-1} \Psi(s) \in L[0,1]$ et dans ce cas, la fonction ci-dessus est dans $N_p[0,1]$, $N_p^{(1)}[0,1]$ suivant qu'on est dans l'hypothèse i) ou ii). Ensuite la fonction

$$s \rightarrow \frac{1-k^2 s^2}{1+s} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \mu(s; \Psi) h(s) \text{ est dans } n_{q_1}^{(0)}[0,1] \text{ avec}$$

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\hat{q}} \text{ dans le cas i) et dans } L_q[0,1] \text{ dans le cas ii) chaque}$$

fois que $k^2 \neq 1$. Lorsque $k^2 = 1$, la fonction précédente est dans $n_{q_1}[0,1]$, $n_{q_1}^{(1)}[0,1]$ suivant qu'on est placé dans l'hypothèse i) ou ii). Il en résulte :

$$\begin{aligned} \text{si } k^2 \neq 1 : \quad & \hat{\varphi} \in N_{q_1}^{(0)}[0,1] \quad \text{dans le cas i)} \\ & \hat{\varphi} \in L_r[0,1] \quad \text{dans le cas ii)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si } k^2 = 1 : \quad & \hat{\varphi} \in N_{q^*}[0,1] \quad \text{dans le cas i)} \\ & \hat{\varphi} \in N_{q^*}^{(1)}[0,1] \quad \text{dans le cas ii)} \end{aligned}$$

Il est possible dans ces conditions de calculer $\mathcal{P}_s\{\hat{\varphi}\}$ en utilisant la formule de Poincaré-Bertrand, car on est placé soit dans les hypothèses classiques, soit dans les hypothèses du théorème 1.8. Montrons que la fonction φ_1 vérifie l'équation suivante :

$$\mathcal{C}(s) \varphi_1'(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s\{\varphi_1\} - \Psi(s) h(s) =$$

$$\alpha \Psi(s) \int_0^1 \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'} h(s') ds'$$

(2.7.9.)

$$- \alpha^2 \frac{A' s}{1 - s} \Psi(s) \int_0^1 \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{1 - s'} h(s') ds'$$

Compte tenu de la formule (1.6.3.) on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s\{\varphi_1\} = & \mathcal{P}_s \left\{ \frac{\Psi(s') \mathcal{C}(s') h(s')}{\Pi^2 s'^2 \Psi^2(s') + \mathcal{C}^2(s')} \right\} - \Pi^2 \mu(s; \Psi) \Psi(s) h(s) \\ & + \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \mu(s'; \Psi) h(s') \left[\mathcal{P}_s \left\{ \frac{1 + \xi}{1 - k^2 \xi^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_\xi\{\tau\}} \Psi(\xi) \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1 + \xi}{1 - k^2 \xi^2} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_\xi\{\tau\}} \Psi(\xi) \right\} \right] \right\} \end{aligned}$$

Or par addition de (2.5.10.) et (2.5.12.) où on fait $\mathcal{S}(s) = 1$, on a :

$$\mathcal{P}_s \left\{ \frac{1 + \xi}{1 - k^2 \xi^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_\xi\{\tau\}} \Psi(\xi) \right\} = \frac{1 + s}{1 - k^2 s^2} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \frac{\mathcal{C}(s)}{s}$$

(2.7.10.)

$$= \frac{\alpha}{s} - \frac{\alpha^2 A'}{1 - s}$$

avec A' donné par (2.5.16.), d'où après quelques calculs simples :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s\{\varphi_1\} &= \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \frac{\tau(s)}{s} \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \mu(s'; \Psi) h(s') \right\} \\ &- \Pi^2 \mu(s; \Psi) \Psi(s) h(s) - \frac{\alpha}{s} \int_0^1 \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'} h(s') ds' \\ &+ \frac{\alpha^2 A'}{1-s} \int_0^1 \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{1-s'} h(s') ds' \end{aligned}$$

Après multiplication par $s \Psi(s)$, on trouve bien (2.7.9.) compte tenu de l'expression de $\varphi_1(s)$. Il en résulte que la fonction (2.7.5.), qu'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\hat{\varphi}_1(s) = \varphi_1(s) - \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \Psi(s) \int_0^1 \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'} h(s') ds'$$

vérifie l'équation suivante :

$$\tau(s) \hat{\varphi}_1(s) - s \varphi(s) \mathcal{P}_s\{\hat{\varphi}_1\} - \Psi(s) h(s) =$$

$$(2.7.11.) - \alpha^2 A' \frac{s}{1-s} \Psi(s) \int_0^1 \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1-s')} h(s') ds'$$

Il suffit de porter cette expression de $\hat{\varphi}_1$ dans (2.7.9.) et d'utiliser encore une fois (2.7.10.)

Pour $k^2 \neq 1$, $A' = 0$: la fonction $\hat{\varphi}_1$ est bien solution de l'équation (2.7.1.).

Pour $k^2 = 1$, $A' > 0$; on introduit la fonction :

$$\hat{\varphi}_2(s) = \hat{\varphi}_1(s) + e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{s \Psi(s)}{1-s} \int_0^1 e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s' \Psi)}{s'} h(s') ds'$$

Portant cette expression dans (2.7.11.) et compte tenu de (2.5.12.) où $S(s) = 1$ et $k^2 = 1$, on voit facilement que cette fonction identique à (2.7.6.), est bien solution de l'équation (2.7.1.). Les expressions précédentes des solutions $\hat{\varphi}_1$ et $\hat{\varphi}_2$ montrent que ces fonctions sont bien dans les espaces indiqués dans l'énoncé.

Remarque. Lorsque la fonction donnée h est identique à un polynôme à coefficients réels, il n'est plus nécessaire d'utiliser la formule de Poincaré-Bertrand; l'équation (2.7.1.) possède une solution sous des conditions plus larges que ii) où on est placé a priori dans ce cas :

Théorème 2.4. bis Soit Ψ vérifiant H_1 et H_2 et de plus $\Psi \in N_p^{(0)}[0,1]$. Si la fonction h est un polynôme à coefficients réels, alors l'équation (2.7.1.) possède la solution suivante :

$$\varphi(s) = \alpha^{-2} \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \Psi(s) \left\{ \begin{aligned} &\hat{h}(s) - \hat{h}(1) \\ &+ (1-s) \left(\hat{h}(1) - \hat{h}(0) + \alpha h(0) \right) \end{aligned} \right\}$$

où le polynôme $\hat{h}(z)$ est défini par

$$(2.7.13.) \quad (1-z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} h(z) - \hat{h}(z) = 0 \left(\frac{1}{z} \right), \quad |z| > 1.$$

D'après (2.3.8.) où $S(s) = h(s)$, la fonction φ_1 (2.7.3.) peut s'écrire :

$$\varphi_1(s) = \alpha^{-2} \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \Psi(s) \hat{h}(s)$$

où $\hat{h}$ est défini par (2.7.13.) Montrons que φ_1 vérifie l'équation :

$$(2.7.14.) \quad s(1-s) \varphi_1(s) \mathcal{T}(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s \left\{ s' (1-s') \varphi_1(s') \right\} = s(1-s) \Psi(s) h(s) \quad 0 < s < 1.$$

En effet de (2.4.4.) où $S(s) = \hat{h}(s)$ on a :

$$\mathcal{P}_s \left\{ s' (1-s') \varphi_1(s') \right\} = \alpha^{-2} \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} \hat{h}(s) e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \tau(s) - \tilde{S}(s)$$

où $\tilde{S}(s)$ est donné par

$$(2.7.15.) \quad e^{\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)} \hat{h}(z) - \tilde{S}(z) = 0 \left(\frac{1}{z} \right), \quad |z| > 1$$

Or (2.7.15.) et (2.7.13.) montrent que $\tilde{S}(z) = (1-z) h(z)$, d'où (2.7.14.). Or cette égalité peut s'écrire, après division par s :

$$(1-s) \varphi_1(s) \tau(s) - s(1-s) \Psi(s) \mathcal{P}_s\{\varphi_1\} - (1-s) \Psi(s) h(s) = \Psi(s) \left\{ (1-s) \int_0^1 \varphi_1(s') ds' - \int_0^1 s' \varphi_1(s') ds' \right\}, \quad 0 < s < 1$$

Soit alors la fonction suivante :

$$(2.7.16.) \quad \hat{\varphi}(s) = \varphi_1(s) - I \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \Psi(s) + J \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} s \Psi(s)$$

$$\text{où} \quad I = \int_0^1 \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'} h(s') ds'$$

$$J = \int_0^1 \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1-s')} h(s') ds'$$

Compte tenu de (2.7.10.) et de (2.5.12.) où $S(s) = 1$, on a :

$$(1-s) \hat{\varphi}(s) \tau(s) - s(1-s) \Psi(s) \mathcal{P}_s\{\hat{\varphi}\} - (1-s) \Psi(s) h(s) =$$

$$(2.7.17.) \quad \Psi(s) \left\{ (1-s) \int_0^1 \varphi_1(s') ds' - \int_0^1 s' \varphi_1(s') ds' \right\} - \Psi(s) \left\{ \alpha I (1-s) + \alpha^2 A' (I - J) s \right\}$$

Or d'après (2.5.14.) et (2.5.15.) où $S(s) = \hat{h}(s)$, on a :

$$\int_0^1 \varphi_1(s') ds' = \alpha^{-1} \hat{h}(0) - h(0) - A' \hat{h}(1)$$

$$\int_0^1 s' \varphi_1(s') ds' = -A' \hat{h}(1)$$

et d'après (2.5.5.) et (2.5.6.) où $S(s) = h(s)$, on a :

$$I = \alpha^{-2} \left(\hat{h}(0) - \alpha h(0) \right)$$

$$J = \alpha^{-2} \left\{ \hat{h}(0) - \hat{h}(1) + h(1) - A - \alpha h(0) \right\}$$

Le second membre de (2.7.17.) devient :

$$s \Psi(s) - A - A' h(1)$$

Or d'après (2.5.7.) et (2.5.16.), $A - A' = 0$: la fonction (2.7.16.) est bien solution de l'équation. Cette fonction peut s'écrire aussi, compte tenu des valeurs de I et J :

$$\hat{\varphi}(s) = \alpha^{-2} \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \Psi(s) \left\{ \hat{h}(s) - \hat{h}(1) + (1-s) \left(\hat{h}(1) - \hat{h}(0) + \alpha h(0) \right) \right\}$$

$$+ \alpha^{-2} A h(1) \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} s \Psi(s)$$

ou encore :

$$\hat{\varphi}(s) = \varphi(s) + \alpha^{-2} A h(1) \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} s \Psi(s)$$

ce qui montre que la fonction (2.7.12.) est aussi solution puisque le second terme de $\hat{\varphi}$ est toujours solution de l'équation homogène (2.6.1.).

Théorème 2.5. Soit Ψ vérifiant H_1 et H_2 et soit p tel que

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1$. Si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

$$\begin{array}{ll} i) & \Psi \in N_p^{(0)}[0,1] \quad ; \quad ii) \quad \Psi \in L_p [0,1] \\ & g \in L_{\hat{p}} [0,1] \quad \quad \quad g \in N_{\hat{p}}^{(0)}[0,1] \end{array}$$

avec $\frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p'} < 1$.

alors l'équation

$$\tau(s) \chi(s) + s \Psi(s) \mathcal{P}_s \{\chi\} = s \Psi(s) g(s), \quad 0 < s < 1$$

possède la solution unique dans $N_{p'}[0,1]$ si $k^2 \neq 1$ et dans $N_{p'}^{(0)}[0,1]$ si $k^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \chi(s) &= \frac{s \Psi(s) \tau(s) g(s)}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)} - \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{1 - s} \\ (2.7.18.) \quad \mathcal{P}_s &\left\{ \frac{1 + s'}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} s' (1-s') \Psi(s') g(s') \right\} \end{aligned}$$

sans restriction supplémentaire sur g lorsque $T(1+0) = -\infty$ ou $T(1+0) > 0$ et si et seulement si g vérifie la condition d'orthogonalité suivante :

$$(2.7.19.) \quad \int_0^1 \frac{1 + s'}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} s' \Psi(s') g(s') ds' = 0$$

lorsque $-\infty < T(1+0) < 0$.

Considérons la fonction (2.7.4.) qu'on peut écrire sous la forme abrégée

$$\chi_1(s) = \mu(s; \Psi) \tau(s) g(s) - \hat{\chi}(s)$$

On a : $|\mu(s; \Psi) \tau(s) g(s)| \leq \frac{1}{2\pi} |g(s)| \in N_p^{(0)}[0,1]$. Ensuite la fonction $s \rightarrow \frac{1-k^2 s^2}{1+s} e^{\frac{1}{\pi} R_s\{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{s(1-s)}$ est dans $N_q[0,1]$ lorsque $k^2 \neq 1$ et dans $N_q^{(0)}[0,1]$ lorsque $k^2 = 1$; la fonction $s \rightarrow \frac{1+s}{1-k^2 s^2} s(1-s) e^{-\frac{1}{\pi} R_s\{\tau\}} s \Psi(s) g(s)$ est dans $n_{p_1}[0,1]$ lorsque $k^2 \neq 1$ et dans $n_{p_1}^{(0)}[0,1]$ lorsque $k^2 = 1$ avec $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{p}$ et cela, pour les deux fonctions ci-dessus dans l'un ou l'autre des cas i), ii). Il en résulte que $\hat{\chi}$ appartient à $N_{p_1}[0,1]$ ou à $N_{p_1}^{(0)}[0,1]$ suivant que $k^2 \neq 1$ ou $k^2 = 1$ dans tous les cas.

De plus, on est placé dans les hypothèses du théorème 1.8.; donc à l'aide de la formule de Poincaré-Bertrand :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s \{\chi_1\} &= \mathcal{P}_s \left\{ \mu(s'; \Psi) \tau(s') g(s') \right\} + \pi \mu(s; \Psi) s \Psi(s) g(s) \\ &= \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1+s'}{1-k^2 s'^2} s' (1-s') e^{-\frac{1}{\pi} R_{s'}\{\tau\}} s' \Psi(s') g(s') \right\} \\ &\quad \left[\mathcal{P}_s \left\{ \frac{1-k^2 \xi^2}{1+\xi} e^{\frac{1}{\pi} R_\xi\{\tau\}} \frac{\mu(\xi; \Psi)}{\xi(1-\xi)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1-k^2 \xi^2}{1+\xi} e^{\frac{1}{\pi} R_\xi\{\tau\}} \frac{\mu(\xi; \Psi)}{\xi(1-\xi)} \right\} \right] \end{aligned}$$

Mais par addition de (2.5.1.) et (2.5.3) où

$S(s) = 1$, on a :

$$\mathcal{P}_s \left\{ \frac{1 - k^2 \xi^2}{1 + \xi} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_\xi \{\tau\}} \frac{\mu(\xi; \Psi)}{\xi(1 - \xi)} \right\} = \frac{\alpha^{-1}}{s} + \frac{A}{1 - s}$$

$$(2.7.20) \quad - \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \frac{\lambda(s; \Psi)}{s(1 - s)}$$

de sorte que, après quelques calculs :

$$\mathcal{P}_s \{\chi_1\} = g(s) - \frac{\tau(s)}{s\Psi(s)} \chi_1(s) - \frac{\alpha^{-1}}{s} \int_0^1 \frac{1 + s'}{1 - k^2 s'^2} s'(1-s') e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'} \{\tau\}} \Psi(s') g(s') ds'$$

$$+ \frac{A}{1 - s} \int_0^1 \frac{1 + s'}{1 - k^2 s'^2} s'^2 e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'} \{\tau\}} \Psi(s') g(s') ds'$$

ou aussi :

$$\tau(s) \chi_1(s) + s\Psi(s) \mathcal{P}_s \{\chi_1\} - s\Psi(s) g(s) =$$

$$- \frac{\alpha^{-1}}{s} \int_0^1 \frac{1 + s'}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'} \{\tau\}} s'(1-s') \Psi(s') g(s') ds'$$

$$+ \frac{A}{1 - s} \int_0^1 \frac{1 + s'}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'} \{\tau\}} s'^2 \Psi(s') g(s') ds'$$

Il est aisé de vérifier que les deux intégrales ci-dessus ont un sens dans tous les cas. Soit alors la fonction (2.7.18.) qui peut s'écrire aussi :

$$\chi(s) = \chi_1(s) + \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} e^{\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\mu(s; \varphi)}{s(1-s)} X$$

$$\int_0^1 \frac{1 + s'}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} s'(1-s') \Psi(s') g(s') ds'$$

On a facilement, compte tenu de (2.7.20) :

$$\mathcal{T}(s) \chi(s) + s \Psi(s) \mathcal{P}_s \{\chi\} - s \Psi(s) g(s) =$$

$$A \frac{s}{1-s} \Psi(s) \int_0^1 \frac{1 + s'}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} s' \Psi(s') g(s') ds'$$

D'où : χ est solution de l'équation (2.7.2.) si et seulement si on a :

$$(2.7.21.) \quad A \int_0^1 \frac{1 + s'}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} s' \Psi(s') g(s') ds' = 0$$

D'après (2.5.7.) $A = 0$ si $k^2 = 1$ ($\Leftrightarrow T(1+0) > 0$) ou $T(1+0) = -\infty$; alors (2.7.21) est vérifiée. Lorsque $-\infty < T(1+0) < 0$, on a $A > 0$ et (2.7.19) entraîne (2.7.21).

Remarques : Le résultat obtenu implique que l'équation (2.1.8.) c'est à dire $\mathcal{T}(s) \varphi^*(s) + \mathcal{P}_s \{ s' \Psi(s') \varphi^*(s') \} = g(s)$ possède une solution φ^* donnée par (2.1.10.) et (2.7.18.), non nécessairement sommable dans le cas où $T(1+0) = -\infty$. Lorsqu'on impose à φ^* d'être au moins sommable, on est conduit à poser la condition (2.7.19.) chaque fois que $k^2 \neq 1$, ce qui est bien la traduction du fait que g doit être orthogonale à toutes les solutions de l'équation homogène adjointe (2.6.1.)

§ 1. Les résultats du chapitre précédent permettent de résoudre l'équation de Chandraschkar et le système des fonctions $X - Y$ de Chandraschkar (que nous introduirons plus loin). Traitons d'abord le cas de l'équation (2.1.1.) c'est à dire :

$$(3.1.1.) \quad \frac{1}{H(s)} = 1 - s \int_0^1 \frac{\Psi(s') H(s')}{s' + s} ds' , \quad 0 < s \leq 1.$$

On a vu que toute solution de (3.1.1.) vérifie l'équation suivante

$$(3.1.2.) \quad \tau(s) H(s) - s \int_0^1 \frac{\Psi(s') H(s')}{s' - s} ds' = 1 , \quad 0 < s < 1.$$

qu'on a étudié sous la forme

$$\tau(s) \varphi(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s \{ \varphi \} = \Psi(s)$$

en posant

$$(3.1.3.) \quad \varphi(s) = \Psi(s) H(s)$$

Il s'agit de voir si réciproquement, toute solution de (3.1.2.) est aussi solution de (3.1.1.). On cherche évidemment des solutions de (3.1.1.) qui soient analytiques dans tout le plan muni de la coupure $[-1, 0]$.

Théorème 3.1. Soit Ψ vérifiant H_1 et H_2 et de plus $\Psi \in N_p^{(0)} [0, 1]$. L'équation (3.1.1.) possède la (ou les) solution(s) suivante(s), analytique(s) dans $C - [-1, 0]$.

a) Si $T(1+0) < 0$:

$$(3.1.4.) \quad H(s) = (1 - 2\Psi_0) - \frac{1}{2} \frac{1+s}{w+s} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{ \tau \}}$$

$$(3.1.5.) \quad H_+(s) = (1 - 2\Psi_0) e^{-\frac{1}{2} \frac{1+s}{w-s}} - \frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}$$

où w est l'unique racine > 1 de $T(w) = 0$

$$(3.1.6.) \quad H(s) = (2\Psi_2) e^{-\frac{1}{2} \frac{1+s}{w-s}} - \frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}$$

$$a_3) \quad 1 - 2\Psi_0 < 0$$

$$(3.1.7.) \quad H_-(s) = (2\Psi_0 - 1) e^{-\frac{1}{2} \frac{1+s}{w+is}} - \frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}$$

$$(3.1.8.) \quad H_+(s) = (2\Psi_0 - 1) e^{-\frac{1}{2} \frac{1+s}{w-is}} - \frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}$$

où w est l'unique racine positive de $T(iw) = 0$

$$b) \quad \underline{\text{Si}} \quad T(1+0) > 0$$

$$(3.1.9.) \quad H(s) = (1 - 2\Psi_0) e^{-\frac{1}{2} \frac{1+s}{w-s}} - \frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}$$

D'après les théorèmes 2.4. et 2.4.^{bis}, l'équation (2.7.1.) possède la solution générale suivante :

$$\varphi(s) = C \frac{1+s}{1-\kappa^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} + s \Psi(s) + \alpha^{-2} \frac{1+s}{1-\kappa^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \Psi(s)$$

$$(3.1.10.) \quad \hat{h}(s) = \hat{h}(1) + (1-s) \left(\hat{h}(1) - \hat{h}(0) + \alpha \hat{h}(0) \right)$$

où $C = 0$ si $h^2 = 1$. Ici $h(s) = 1$, donc d'après (2.7.13.) on a :

$$\hat{h}(z) = -z + 1 - \frac{\tau_0}{\Pi}$$

de sorte que (3.1.10.) s'écrit ici :

$$\varphi(s) = C \frac{1+s}{1-h^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} s \Psi(s) + \alpha^{-1} \frac{1-s^2}{1-h^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \Psi(s)$$

(3.1.11.)

On en déduit d'après (3.1.3.) la solution générale de l'équation (3.1.2.) :

$$H(s) = C \frac{s(1+s)}{1-h^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} + \alpha^{-1} \frac{1-s^2}{1-h^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}}$$

(3.1.12.)

Calculons $\mathcal{R}_s\{\varphi\}$ pour $s > 0$. D'après (2.5.11.) et (2.5.13.) où on prend $S(z) = 1$ et où on change z en $-s$, on a :

$$\alpha^{-1} \mathcal{R}_s \left[\frac{1-s'^2}{1-h^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \Psi(s') \right] = \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{s} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}}$$

$$\mathcal{R}_s \left[\frac{1+s'}{1-h^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} s' \Psi(s') \right] = \alpha^2 \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}}}{1+s} - \frac{A' \alpha^2}{1+s}$$

car (2.4.3.) montre que $\tilde{S}(z) = 1$. Il en résulte :

$$\mathcal{R}_s\{\varphi\} = C \alpha^2 \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}}}{1+s} - C A' \frac{\alpha^2}{1+s} + \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{s} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}}$$

ou

$$s \mathcal{R}_s\{\varphi\} = 1 - \alpha \frac{e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}}}{1 + s} \left\{ 1 + (1 - C \alpha) s \right\}$$

(3.1.13.)

car $C A' = 0$ d'après la définition (2.5.16.) de A' . Or de (3.1.12.) on a :

$$\alpha \frac{e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}}}{1 + s} = \frac{1}{H(s)} \frac{1 - (1 - C \alpha) s}{1 - k^2 s^2}$$

d'où pour (3.1.13.)

$$s \mathcal{R}_s\{\varphi\} = 1 - \frac{1 - (1 - C \alpha)^2}{1 - k^2 s^2} \cdot \frac{1}{H(s)}$$

En comparant avec (3.1.1.) on a le résultat : la fonction (3.1.12.) est solution de (3.1.1.) si et seulement si la constante C vérifie la condition suivante :

$$(3.1.14.) \quad (1 - C \alpha)^2 = k^2$$

lorsque $k^2 = 1$, on a $C = 0$: la condition (3.1.14.) est satisfaite d'où la solution (3.1.9.) puisque

$$\alpha^{-1} = (1 - 2 \Psi_0) - \frac{1}{2}$$

d'après (2.2.20.) et (2.2.21.)

Lorsque $k^2 \neq 1$, la solution générale (3.1.12.) s'écrit, compte tenu de (3.1.14.) :

$$H(s) = \alpha^{-1} \frac{1 + s}{1 + k s} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}}$$

On en déduit facilement les expressions (3.1.4.) - (3.1.8.) à partir de (2.2.17.), (2.2.20) et (2.2.21.).

§ 2. Considérons le système de Chandraschkar : [9]

$$(3.2.1.) \quad X(s) = 1 + s \int_0^1 \left(X(s) X(s') - Y(s) Y(s') \right) \frac{\Psi(s')}{s' + s} ds'$$

$$(3.2.2.) \quad Y(s) = e^{-r/s} - s \int_0^1 \left(Y(s) X(s') - X(s) Y(s') \right) \frac{\Psi(s')}{s' - s} ds'$$

$$0 < s < 1$$

où X et Y sont les fonctions de Chandraschkar liées par

$$(3.2.3.) \quad Y(s) = e^{-r/s} X(-s), \quad 0 < s < 1$$

A5

Ici $0 < r < +\infty$. Lorsque $r = +\infty$, d'après (3.2.3.) $Y(s) = 0$ et l'équation (3.2.1.) se réduit à l'équation (3.1.1.) (du moins formellement). On peut séparer l'intégrale au second membre de (3.2.2.) en ses deux parties et prendre chacune d'elle au sens de la valeur principale. Posant :

$$(3.2.4.) \quad \sigma_1(s) = \Psi(s) X(s); \quad \sigma_2(s) = \Psi(s) Y(s),$$

on peut ainsi écrire le système (3.2.1.) (3.2.2.) sous la forme suivante :

$$(3.2.5.) \quad \sigma_1(s) = \Psi(s) + s \left\{ \sigma_1(s) R_s[\sigma_1] - \sigma_2(s) R_s[\sigma_2] \right\}$$

$$(3.2.6.) \quad \sigma_2(s) = \Psi(s) e^{-r/s} + s \left\{ \sigma_1(s) P_s[\sigma_2] - \sigma_2(s) P_s[\sigma_1] \right\}$$

$$0 < s < 1$$

Remarque : Nous avons écrit le système (3.2.1)-(3.2.2.) dans $]0,1[$. Mais il est bien évident que les seconds membres de ces équations définissent un opérateur sur l'ensemble des fonctions holomorphes dans $C - \{0\}$, de sorte que nous cherchons des solutions dans cette classe de fonctions : une solution holomorphe dans $]0,1[$ étant trouvée pour le système (3.2.1.) (3.2.2.) il s'agira d'étudier la possibilité de la prolonger dans $C - \{0\}$. Plus généralement, nous admettons des solutions ayant des pôles dans $C - [0,1]$.

Lemme 3.1. Toute solution du système (3.2.5.)- (3.2.6.) vérifie le système linéaire suivant : (comparer avec [9]).

$$(3.2.7.) \quad \tau(s) \sigma_1(s) = \Psi(s) + s \left\{ \Psi(s) \mathcal{P}_s \{\sigma_1\} - \Psi(s) e^{-r/s} \mathcal{R}_s \{\sigma_2\} \right\}$$

$$(3.2.8.) \quad \tau(s) \sigma_2(s) = \Psi(s) e^{-r/s} - s \left\{ \Psi(s) e^{-r/s} \mathcal{R}_s \{\sigma_1\} - \Psi(s) \mathcal{P}_s \{\sigma_2\} \right\} \quad 0 < s < 1$$

On utilise la formule suivante, qui se démontre facilement :

$$\mathcal{R}_s \left\{ \sigma_1(s') \mathcal{R}_s \{\sigma_2\} \right\} = \mathcal{P}_s \left\{ \sigma_2(s') [\mathcal{R}_s \{\sigma_1\} - \mathcal{R}_{s'} \{\sigma_1\}] \right\}$$

(3.2.9.) pour toutes $\sigma_1, \sigma_2 \in L[0,1]$.

D'après (3.2.5.) et (3.2.9.), on obtint :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_s \{\sigma_1\} &= \mathcal{R}_s \{\Psi\} + \mathcal{P}_s \left\{ \sigma_1(s') [\mathcal{R}_s \{\varphi \sigma_1(\varphi) - \mathcal{R}_{s'} \{\varphi \sigma_1(\varphi)\}] \right\} \\ &\quad - \mathcal{P}_s \left\{ \sigma_2(s') [\mathcal{R}_s \{\varphi \sigma_2(\varphi) - \mathcal{R}_{s'} \{\varphi \sigma_2(\varphi)\}] \right\} \\ &= \mathcal{R}_s \{\Psi\} + \mathcal{P}_s \left\{ \sigma_1(s') [s' \mathcal{R}_{s'} \{\sigma_1\} - s \mathcal{R}_s \{\sigma_1\}] \right\} \\ &\quad - \mathcal{P}_s \left\{ \sigma_2(s') [s' \mathcal{R}_{s'} \{\sigma_2\} - s \mathcal{R}_s \{\sigma_2\}] \right\} \\ &= \mathcal{R}_s \{\Psi\} + \mathcal{P}_s \left\{ s' [\sigma_1(s') \mathcal{R}_{s'} \{\sigma_1\} - \sigma_2(s') \mathcal{R}_{s'} \{\sigma_2\}] \right\} \\ &\quad + s \left\{ \mathcal{P}_s \{\sigma_2\} \mathcal{R}_s \{\sigma_2\} - \mathcal{P}_s \{\sigma_1\} \mathcal{R}_s \{\sigma_1\} \right\} \end{aligned}$$

Compte tenu de (3.2.5.) on a :

$$(3.2.10.) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}_s \{\sigma_1\} &= \mathcal{R}_s \{\Psi\} - \mathcal{P}_s \{\Psi\} + \mathcal{P}_s \{\sigma_1\} \\ &\quad + s \left\{ \mathcal{P}_s \{\sigma_2\} \mathcal{R}_s \{\sigma_2\} - \mathcal{P}_s \{\sigma_1\} \mathcal{R}_s \{\sigma_1\} \right\} \end{aligned}$$

D'autre part, multipliant (3.2.5.) par $\mathcal{P}_s \{\sigma_1\}$, (3.2.6.) par $\mathcal{R}_s \{\sigma_2\}$ et soustrayant membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_1(s) \mathcal{P}_s \{\sigma_1\} - \sigma_2(s) \mathcal{R}_s \{\sigma_2\} &= \Psi(s) \mathcal{P}_s \{\sigma_1\} - \Psi(s) e^{-r/s} \mathcal{R}_s \{\sigma_2\} \\ &\quad + s \sigma_1(s) \left\{ \mathcal{P}_s \{\sigma_1\} - \mathcal{P}_s \{\sigma_2\} \mathcal{R}_s \{\sigma_2\} \right\} \end{aligned}$$

Compte tenu de (3.2.10.) , cette égalité devient :

$$\sigma_1(s) \mathcal{P}_s \{\sigma_1\} - \sigma_2(s) \mathcal{R}_s \{\sigma_2\} = \Psi(s) \left[\mathcal{P}_s \{\sigma_1\} - e^{-r/s} \mathcal{R}_s \{\sigma_2\} \right] \\ + \sigma_1(s) \left[\mathcal{R}_s \{\Psi\} - \mathcal{P}_s \{\Psi\} \right] + \mathcal{P}_s \{\sigma_1\} - \mathcal{R}_s \{\sigma_1\}$$

c'est à dire :

$$\sigma_1(s) \mathcal{R}_s \{\sigma_1\} - \sigma_2(s) \mathcal{R}_s \{\sigma_2\} = \Psi(s) \left[\mathcal{P}_s \{\sigma_1\} - e^{-r/s} \mathcal{R}_s \{\sigma_2\} \right] \\ + \sigma_1(s) \left[\mathcal{R}_s \{\Psi\} - \mathcal{P}_s \{\Psi\} \right]$$

On multiplie enfin les deux membres de cette égalité par s et compte tenu de (3.2.5.) , on obtient :

$$\sigma_1(s) \left[1-s \left(\mathcal{R}_s \{\Psi\} - \mathcal{P}_s \{\Psi\} \right) \right] = \Psi(s) + s \Psi(s) \mathcal{P}_s \{\sigma_1\} - s \Psi(s) e^{-r/s} \mathcal{R}_s \{\sigma_2\}$$

C'est bien (3.2.7.) d'après la définition (2.1.4.) de $\tau(s)$. On obtient facilement (3.2.8.) à l'aide de (3.2.7.) et (3.2.3.).

Le système (3.2.7.) - (3.2.8.) n'est couplé qu'en apparence. En effet, prenons comme nouvelles inconnues les fonctions suivantes :

$$(3.2.11.) \quad \rho_\varepsilon(s) = \sigma_1(s) + \varepsilon \sigma_2(s) ; \quad \varepsilon = \pm 1$$

On obtient les deux équations indépendantes (dont l'ensemble est équivalent au système (3.2.7.) - (3.2.8.)) :

$$\rho_\varepsilon(s) \tau(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s \{\rho_\varepsilon\} = \Psi(s) \left\{ 1 + \varepsilon e^{-r/s} - \varepsilon s e^{-r/s} \mathcal{R}_s \{\rho_\varepsilon\} \right\} \\ (3.2.12.) \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

Lemme 3.2. Soit Ψ vérifiant H_1 et H_2 et de plus $\Psi \in N_p^{(0)}[0,1]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$

Posons :

$$(3.2.13.) \quad h_\varepsilon(s) = 1 + \varepsilon e^{-r/s} - \varepsilon s e^{-r/s} \mathcal{R}_s \{\rho_\varepsilon\}$$

Alors l'équation (3.2.12.) est équivalente à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \rho_{\varepsilon}(s) = & M \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} s \Psi(s) + \frac{\Psi(s) \mathcal{T}(s)}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \mathcal{T}^2(s)} h_{\varepsilon}(s) \\ & + \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} s \Psi(s) \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'(1-s')} h_{\varepsilon}(s') \right\} \end{aligned}$$

(3.2.14.)

$0 < s < 1$

où M est un réel quelconque si $k^2 \neq 1$ et nul si $k^2 = 1$

Pour $\rho_{\varepsilon} \in L[0,1]$, la fonction h_{ε} est continue sur $[0,1]$ et $h_{\varepsilon}(s) - 1$ est dans $n_q^{(0)}[0,1]$ pour tout $\hat{q} > 1$. En vertu des théorèmes 2.4. et 2.4.^{bis}, l'équation (3.2.12.), où le second membre est supposé connu, possède une solution générale fournie par (2.7.7.) avec $h(s)$ remplacée par $h_{\varepsilon}(s)$. Mais puisque l'intégrale suivante est finie :

$$\int_0^1 \left| \frac{1-k^2 s^2}{1+s} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{s(1-s)} h_{\varepsilon}(s) \right| ds < +\infty$$

(car $h_{\varepsilon}(s)$ est continu en $s = 1$), l'expression prend la forme (3.2.14.) en accord avec (2.7.6.) lorsque $k^2 = 1$ ($A = 0$).

Lemme 3.3. Posons :

$$(3.2.15.) \quad \chi_{\varepsilon}(s) = s \mathcal{R}_s\{\rho_{\varepsilon}\}$$

où ρ_{ε} est une solution de l'équation (3.2.14.). Alors la fonction (3.2.15.) vérifie l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \chi_{\varepsilon}(s) = & \alpha^2 \frac{M s}{1+s} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} + \alpha^2 s e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \mathcal{R}_s \left\{ \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'(1-s')} \right. \\ & \left. (1 + \varepsilon e^{-r/s'}) \right\} \\ & - \varepsilon \int_0^1 k(s, s') \chi_{\varepsilon}(s') ds' \end{aligned}$$

où

$$h(s, s') = \alpha^2 s e^{\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} + \frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\} \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} \frac{e^{-r/s'}}{s' + s} \quad (3.2.17.)$$

Calculons $R_s\{p_\varepsilon\}$ à partir de (3.2.14.). D'après la formule (1.6.4.) du théorème 1.8., on a :

$$R_s \left\{ \frac{1 - s'^2}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} s' \Psi(s') \mathcal{P}_{s'} \left\{ \frac{1 - k^2 \varphi^2}{1 + \varphi} e^{\frac{1}{\Pi} R_\varphi\{\tau\}} \frac{\mu(\varphi; \Psi)}{\varphi (1 - \varphi)} h_\varepsilon(\varphi) \right\} \right\} =$$

$$R_s \left[\frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} h_\varepsilon(s') \left[R_s \left\{ \frac{1 - \varphi^2}{1 - k^2 \varphi^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_\varphi\{\tau\}} \varphi \Psi(\varphi) \right\} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \mathcal{P}_{s'} \left\{ \frac{1 - \varphi^2}{1 - k^2 \varphi^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_\varphi\{\tau\}} \varphi \Psi(\varphi) \right\} \right] \right]$$

Or, d'après (2.4.4.) et (2.4.5.) où $S(z) = 1$, on a :

$$\mathcal{P}_s \left\{ \frac{1 - \varphi^2}{1 - k^2 \varphi^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_\varphi\{\tau\}} \varphi \Psi(\varphi) \right\} = \frac{1 - s^2}{1 - k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \tau(s) - \alpha^2$$

$0 < s < 1$

$$R_s \left\{ \frac{1 - \varphi^2}{1 - k \varphi^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_\varphi\{\tau\}} \varphi \Psi(\varphi) \right\} = \alpha^2 e^{\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} - \alpha^2, \quad s > 0$$

Ensuite, de (2.5.13.) on a la relation suivante, déjà utilisée :

$$R_s \left\{ \frac{1 + s'}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} s' \Psi(s') \right\} = \alpha^2 e^{\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{1}{1 + s} - \frac{A' \alpha^2}{1 + s}$$

de sorte que, compte tenu de ces relations, on a :

$$\mathcal{R}_s \{p_c\} = M \alpha^2 \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}}}{1+s} - \frac{A' \alpha^2}{1+s} + \alpha^2 e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \mathcal{R}_s \left[\frac{1 - k^2 s'^2}{1+s'} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'} \{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1-s')} h \varepsilon(s') \right]$$

Mais $MA' = 0$ et en multipliant par s et compte tenu de (3.2.13.), on obtient (3.2.16.) où $k(s, s')$ est donné par (3.2.17.)

L'opérateur défini par le second membre de (3.2.16.) transforme $C[0,1]$ en lui-même. On utilisera la norme suivante pour le noyau (3.2.17.):

$$\|k\| = \sup_{0 \leq s \leq 1} \int_0^1 k(s, s') ds', \quad (k(s, s') \geq 0)$$

Théorème 3.2. Pour toute Ψ vérifiant H_1 et H_2 , $\Psi \in N_p^{(0)}[0,1]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$,

$$(3.2.18.) \quad \|k\| \leq e^{-r} \left(1 - e^{-\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{s(1+s)} ds} \right)$$

En conséquence, l'équation (3.2.16.) possède une solution unique dans $C[0,1]$ pour chaque M réel.

On a :

$$\int_0^1 k(s, s') ds' = \alpha^2 s e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \mathcal{R}_s \left[\frac{1 - k^2 s'^2}{1+s'} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'} \{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1-s')} \right] e^{-r/s'}$$

donc

$$\int_0^1 k(s, s') ds' \leq \alpha^2 e^{-r} s e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \mathcal{R}_s \left[\frac{1 - k^2 s'^2}{1+s'} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'} \{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1-s')} \right]$$

Or, par addition membre à membre de (2.5.2.) et (2.5.4.) on obtient, en prenant $S(z) = 1$:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau) \\ & \frac{e}{z} - \frac{\alpha}{z} - \frac{A}{1-z} + \frac{\hat{S}(0) - \hat{S}(z)}{z} + \frac{\hat{S}(1) - \hat{S}(z)}{1-z} \\ & + \alpha^2 \gamma \left(z; \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} \right) = 0 \end{aligned}$$

(3.2.19.)

Mais de (2.3.7.), on voit que $\hat{S}(z) = z + 1 - \frac{\tau_0}{\Pi}$ de sorte que (3.2.19.) devient en changeant z en $-s$:

$$\alpha^2 R_s \left\{ \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} \right\} = \frac{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}}{e} - \frac{\alpha}{s} + \frac{A}{1+s}$$

d'où

$$\int_0^1 k(s, s') ds' \leq e^{-r} \left[1 - e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \left(\alpha - \frac{A s}{1+s} \right) \right]$$

Mais $\alpha - \frac{A s}{1+s} \geq \alpha$, car d'après (2.5.7.) $A \leq 0$.

d'où enfin :

$$\begin{aligned} \|k\| &= \sup_{0 \leq s \leq 1} \int_0^1 k(s, s') ds' \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} e^{-r} \left(1 - \alpha e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \right) \\ &= e^{-r} \left(1 - \alpha e^{\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{1+s} ds} \right) \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition (2.2.16.) de α , on a bien (3.2.18.)

Remarque. La majoration (3.2.18.) est meilleure que celle trouvée par Mullikin [14] pour un noyau analogue à (3.2.17.) ; en effet, cet auteur donne la borne suivante :

$$e^{-r} \left(1 - e^{-\frac{1}{\Pi} \int_0^1 \frac{\tau(s)}{s} ds} \right)$$

Corollaire. L'équation (3.2.14.) possède une solution unique dans

N_q [0,1] pour chaque M réel, avec $q' > \frac{pq}{p+q}$.

En ce qui concerne l'équation homogène associée à (3.2.12.) soit :

$$(3.2.20) \quad \rho_\varepsilon(s) \tau(s) - s \Psi(s) \mathcal{R}_s \{ \rho_\varepsilon \} + \varepsilon e^{-r/s} s \Psi(s) \mathcal{R}_s \{ \rho_\varepsilon \} = 0$$

Lorsque $k^2 = 1$: elle n'a que la solution zéro.

Lorsque $k^2 \neq 1$: elle possède la solution suivante (à un facteur constant près) dans $L[0,1]$:

$$\hat{\rho}_\varepsilon(s) = \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{ \tau \}} s \Psi(s) - \varepsilon e^{-r/s} \frac{\Psi(s) \tau(s)}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)} \hat{\chi}_\varepsilon(s)$$

(3.2.21.)

$$- \varepsilon \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{ \tau \}} s \Psi(s) \mathcal{R}_s \left\{ \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'} \{ \tau \}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1-s')} e^{-r/s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s') \right\}$$

où $\hat{\chi}_\varepsilon(s)$ est la solution unique de l'équation

$$\hat{\chi}_\varepsilon(s) = \alpha^2 \frac{s}{1+s} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{ \tau \}} - \varepsilon \int_0^1 k(s, s') \hat{\chi}_\varepsilon(s') ds'$$

(3.2.22.)

C'est évident d'après les résultats précédents. Que $\hat{\rho}_\varepsilon$ soit dans $L_p[0,1]$ est dû au fait que $e^{-r/s} \hat{\chi}_\varepsilon(s)$ vérifie une condition de Lipschitz (d'ordre un) uniforme sur [0,1] et à la relation (2.7.20.).

Remarque : Les résultats qui suivent ne sont valables que dans le cas $k^2 \neq 1$. La fin de ce paragraphe et les paragraphes suivants traiteront exclusivement ce cas, qui d'ailleurs, est seul à intervenir dans les applications.

Théorème 3.3. Soit $k^2 \neq 1$. Alors l'équation homogène (3.2.20.) possède une solution $\beta_\varepsilon(s)$ telle que :

$$(3.2.23.) \quad \int_0^1 \frac{\beta_\varepsilon(s)}{s} ds = 1$$

Montrons d'abord que la fonction $s \rightarrow \frac{\hat{\rho}_\varepsilon(s)}{s}$, où $\hat{\rho}_\varepsilon(s)$ est donnée par (3.2.21.), est sommable.

Car chacun des trois termes, dont la somme est $\hat{\rho}_\varepsilon(s)/s$, est sommable. Pour le premier c'est évident. Pour le second on a :

$$\left| \frac{e^{-r/s}}{s} \frac{\Psi(s) \tau(s)}{\pi^2 s^2 \Psi^2(s) + \tau^2(s)} \hat{\chi}_\varepsilon(s) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-r/s}}{s^2} \hat{\chi}_\varepsilon(s)$$

Quant au troisième on peut l'écrire :

$$- \varepsilon \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\pi} R_s\{\tau\}} s \Psi(s) \rho_s \left\{ \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\pi} R_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1-s')} \frac{e^{-r/s'}}{s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s') \right\}$$

(3.2.24.)

$$- \varepsilon \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\pi} R_s\{\tau\}} \Psi(s) \int_0^1 \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\pi} R_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1-s')} \frac{e^{-r/s'}}{s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s') ds'$$

Le second terme de (3.2.24.) est évidemment sommable. Ensuite la fonction

$$s \rightarrow \frac{1-k^2 s^2}{1+s} e^{\frac{1}{\pi} R_s\{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{1-s} \frac{e^{-r/s}}{s^2} \hat{\chi}_\varepsilon(s)$$

est dans $N_q^{(1)}[0,1]$ pour tout $p > 1$ et la fonction

$$s \rightarrow \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} s \Psi(s)$$

est dans $n_p^{(1)}[0,1]$ puisque $\Psi \in N_p^{(0)}[0,1]$: on est placé dans les hypothèses du lemme 1.9., de sorte que le premier terme de (3.2.24.) est aussi sommable. Il en résulte également que la formule (1.6.5.) est valable. En vertu de cette formule appliquée au premier terme de (3.2.24.), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\hat{p}_\varepsilon(s)}{s} ds &= \int_0^1 \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \Psi(s) ds - \varepsilon \int_0^1 \frac{e^{-r/s}}{s} \frac{\Psi(s) \tau(s)}{\Pi^2 s^2 \Psi^2(s) \tau^2(s)} \hat{\chi}_\varepsilon(s) ds \\ &+ \varepsilon \int_0^1 \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'-(1-s')} \frac{e^{-r/s'}}{s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s') \mathcal{P}_{s'} \left\{ \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} s \Psi(s) \right\} \\ &- \varepsilon \theta_{-1}^{(\varepsilon)} \int_0^1 \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \Psi(s) ds \end{aligned}$$

en notant

$$(3.2.25.) \quad \theta_n^{(\varepsilon)} = \int_0^1 \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1-s')} s'^n e^{-r/s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s') ds'$$

pour tout n entier relatif.

Or de (2.4.4.) où $\mathcal{S}(z) = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{s'} \left\{ \frac{1-s'^2}{1-k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'}\{\tau\}} s' \Psi(s') \right\} &= \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \tau(s) - \alpha^2 \\ (3.2.6.) \end{aligned}$$

ensuite de (2.5.14.) et (2.5.15.) où $S(z) = 1$:

$$(3.2.27.) \int_0^1 \frac{1 - s'^2}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \Psi(s') ds' = \alpha (1 - \alpha)$$

$$(3.2.28.) \int_0^1 \frac{1 + s'^2}{1 - k^2 s'^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} s' \Psi(s') ds' = \alpha^2$$

Car $A' = 0$ d'après (2.5.16.)

On en déduit :

$$\int_0^1 \frac{\hat{\rho}_\varepsilon(s)}{s} ds = \alpha - \alpha^2 \varepsilon \theta_{-1}^{(\varepsilon)} - \theta_{-1}^{(\varepsilon)} \varepsilon \alpha (1 - \alpha)$$

$$(3.2.29.) = \alpha (1 - \varepsilon \theta_{-1}^{(\varepsilon)})$$

Traisons d'abord le cas $\varepsilon = -1$. D'après (3.2.29.)

$$\int_0^1 \frac{\hat{\rho}_-(s)}{s} ds > 0$$

car de (3.2.22.) on a $\hat{\chi}_-(s) \geq 0$ ce qui entraîne $\theta_{-1}^{(-)} > 0$.

Il existe donc $C \neq 0$ tel que

$$\beta_-(s) = C \hat{\rho}_-(s)$$

vérifie (3.2.23.)

Supposons maintenant que $\int_0^1 \frac{\hat{\rho}_+(s)}{s} ds = 0$

Alors la fonction $\hat{\rho}_+$ est une solution de l'équation homogène (3.2.20.) où $\varepsilon = -1$; en effet, compte tenu de l'hypothèse, on a :

$$\mathcal{P}_s\{\hat{\rho}+\} = s \mathcal{P}_s \left\{ \frac{\hat{\rho} + (s')}{s'} \right\}$$

$$\mathcal{R}_s\{\hat{\rho}+\} = -s \mathcal{R}_s \left\{ \frac{\hat{\rho} + (s')}{s'} \right\}$$

donc :

$$\hat{\rho} + (s) \tau(s) = s \Psi(s) \mathcal{P}_s\{\hat{\rho}+\} + e^{-r/s} s \Psi(s) \mathcal{R}_s\{\hat{\rho}+\} =$$

$$s \left\{ \frac{\hat{\rho} + (s)}{s} \tau(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s \left\{ \frac{\hat{\rho} + (s')}{s'} \right\} - e^{-r/s} s \Psi(s) \mathcal{R}_s \left\{ \frac{\hat{\rho} + (s')}{s'} \right\} \right\}$$

et puisque le premier membre est nul, le second l'est aussi. Il existe donc C tel que :

$$\frac{\hat{\rho} + (s)}{s} = C \hat{\rho}_- (s)$$

d'où

$$(3.2.30.) \quad 0 = C \int_0^1 \hat{\rho}_-^* (s) ds$$

Or de (3.2.21.) où $\varepsilon = -1$, on a, compte tenu de (3.2.26.) et (3.2.28.) :

$$\int_0^1 \hat{\rho}_-(s) ds = \alpha^2 + \alpha^2 \int_0^1 \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} e^{-r/s'} \hat{\chi}_- (s') ds'$$

c'est à dire $\int_0^1 \hat{\rho}_- (s) ds > 0$; d'où $C = 0$ de (3.2.30.) donc

$\hat{\rho} + (s) = 0$, ce qui entraîne $\hat{\chi} + (s) = s \mathcal{R}_s\{\hat{\rho}+\} = 0$ en contradiction avec (3.2.22.) où $\varepsilon = +1$.

On a donc nécessairement :

$$\int_0^1 \frac{\hat{\rho} + (s)}{s} ds \neq 0$$

ce qui entraîne l'existence d'une solution $\beta + (s)$ vérifiant (3.2.23.).

Corollaire : L'équation (3.2.12.) c'est à dire :

$$\rho_{\varepsilon}(s) \tau(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s \{ \rho_{\varepsilon} \} + \varepsilon e^{-r/s} s \Psi(s) \mathcal{R}_s \{ \rho_{\varepsilon} \} = \Psi(s) (1 + \varepsilon e^{-r/s})$$

$$0 < s < 1.$$

possède la solution générale suivante :

Lorsque $\varepsilon = +1$:

$$(3.2.31.) \quad \rho_+(s) = a \beta_+(s) + \frac{\beta_-(s)}{s}$$

Lorsque $\varepsilon = -1$:

$$(3.2.32.) \quad \rho_-(s) = b \beta_-(s) + \frac{\beta_+(s)}{s}$$

où a, b sont deux paramètres arbitraires.

Il suffit de montrer que $\frac{\beta_-(s)}{s}$ (resp. $\frac{\beta_+(s)}{s}$) est une solution particulière de l'équation (3.2.12.) avec $\varepsilon = +1$ (resp. $\varepsilon = -1$). D'après ce qu'on a vu :

$$\beta_-(s) \tau(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s \{ \beta_-(s') \} - e^{-r/s} s \Psi(s) \mathcal{R}_s \{ \beta_- \} = 0$$

or

$$\mathcal{P}_s \{ \beta_- \} = s \mathcal{P}_s \left\{ \frac{\beta_-(s')}{s'} \right\} + 1$$

$$\mathcal{R}_s \{ \beta_- \} = -s \mathcal{R}_s \left\{ \frac{\beta_-(s')}{s'} \right\} + 1$$

d'après (3.2.23.). La relation précédente devient :

$$s \left\{ \frac{\beta_-(s)}{s} \tau(s) - s \Psi(s) \mathcal{P}_s \left\{ \frac{\beta_-(s')}{s'} \right\} + e^{-r/s} s \Psi(s) \mathcal{R}_s \left\{ \frac{\beta_-(s')}{s'} \right\} - \Psi(s) (1 + e^{-r/s}) \right\} = 0$$

d'où le résultat.

Comme conséquence, on a :

Théorème 3.4. Le système (3.2.7.)-(3.2.8.) possède la solution générale suivante : (lorsque $k^2 \neq 1$)

$$(3.2.33.) \quad \sigma_1(s) = \frac{a}{2} \beta_+(s) + \frac{b}{2} \beta_-(s) + \frac{1}{2} \frac{\beta_+(s) + \beta_-(s)}{s}$$

$$\sigma_2(s) = \frac{a}{2} \beta_+(s) - \frac{b}{2} \beta_-(s) - \frac{1}{2} \frac{\beta_+(s) + \beta_-(s)}{s}$$

(3.2.34.)

où a et b sont deux paramètres arbitraires.

D'après (3.2.11.) et compte tenu des expressions (3.2.31.) et (3.2.32.)

§ 3. Il s'agit de déterminer maintenant les valeurs de a et b pour lesquelles la solution (3.2.33.)-(3.2.24.) vérifie aussi le système (3.2.5.)-(3.2.6.).

Lemme 3.4. La fonction suivante :

$$K(z) = (1-z^2) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau) - \frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\} + z^2 - 1 + \frac{2\tau}{\Pi}}$$

appartient à h_q .

$$z \in C - [-1, +1]$$

Par construction, $K(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$, $|z| \rightarrow +\infty$ et la fonction est développable suivant les puissances décroissantes de z au voisinage de l'infini. D'après le raisonnement fait au lemme 2.4., on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x+iy)|^q dx \leq k_1, \quad \forall y \geq y_0 > 1.$$

$$\text{pour } R > y_0 \quad \int_{|x| \geq R} |K(x+iy)|^q dx \leq k_2, \quad \forall 0 < y \leq y_0$$

Compte tenu de (2.2.22.), on a :

$$K(z) = (1+z) e^{-\frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}} \left(1-z - \frac{\tau_0}{\Pi} - \alpha^2 \gamma \left(z; \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \mu(s; \Psi) \right) \right) \\ + z^2 - 1 + \frac{2\tau_1}{\Pi}$$

d'où $\int_0^R |K(x+iy)|^q dx \leq k_3, \quad \forall 0 < y \leq y_0.$

puisque $\mu(s; \Psi) \in L_q[0,1]$ et $e^{\frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}}$ est bornée pour $Rz \geq 0$.

Ensuite de (2.2.22.) où on change z en $-z$ de manière à exprimer

$$(1+z) e^{-\frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}} \text{ en fonction de } R_z \left\{ \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \mu(s'; \Psi) \right\}$$

et remarquant que $e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)}$ est bornée pour $Rz \leq 0$, on a :

$$\int_{-R}^0 |K(x+iy)|^q dx \leq k_4, \quad \forall 0 < y \leq y_0$$

D'où la propriété.

Lemme 3.5. A tout couple de polynômes $P(z)$ et $Q(z)$ à coefficients réels et à tout couple de fonctions $u, v \in N_p[0,1]$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$, on associe le polynôme $R(z)$ défini par :

$$\frac{z^2(1-z^2)(1-k^2 z^2)}{T(z)} \left\{ P(z) R_z\{u\} \gamma(z; v) + Q(z) R_z\{v\} \gamma(z; u) \right\} \\ (3.3.1.) \quad -R(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| > 1$$

Alors les fonctions u et v (et les polynômes P, Q et R vérifient les relations suivantes :

$$s^2(1-s^2)(1-k^2 s^2) \left\{ \lambda(s; \Psi) [P(s) R_s\{u\} \mathcal{P}_s\{v\} + Q(s) R_s\{v\} \mathcal{P}_s\{u\}] \right. \\ \left. + \Pi^2 \mu(s; \Psi) [P(s) v(s) R_s\{u\} + Q(s) u(s) R_s\{v\}] \right\} - R(s) = \\ \mathcal{P}_s \left\{ s'^2(1-s'^2)(1-k^2 s'^2) \frac{R_{s'}\{u\} P(s') \mathcal{L}_{s'}\{v\} + R_{s'}\{v\} Q(s') \mathcal{L}_{s'}\{u\}}{\Pi^2 s'^2 \Psi^2(s') + \mathcal{T}^2(s')} \right\} \\ R_s \left\{ s'^2(1-s'^2)(1-k^2 s'^2) \frac{R_{s'}\{v\} P(-s') \mathcal{L}_{s'}\{u\} + R_{s'}\{u\} Q(-s') \mathcal{L}_{s'}\{v\}}{\Pi^2 s'^2 \Psi^2(s') + \mathcal{T}^2(s')} \right\}$$

(3.2.2.)

p.p $0 < s < 1$

$$s^2(1-s^2)(1-k^2s^2) \left\{ \lambda(s; \Psi) [P(-s) R_s\{v\} \mathcal{P}_s\{u\} + Q(-s) R_s\{u\} \mathcal{P}_s\{v\}] \right. \\ \left. + \Pi^2 \mu(s; \Psi) [P(-s) u(s) R_s\{v\} + Q(-s) v(s) R_s\{u\}] \right\} = R(-s) = \\ R_s \left\{ s'^2(1-s'^2)(1-k^2s'^2) \frac{R_{s'}\{u\} P(s') \mathcal{L}_{s'}\{v\} + R_{s'}\{v\} Q(s') \mathcal{L}_{s'}\{u\}}{\Pi^2 s'^2 \Psi^2(s') + \mathcal{T}^2(s')} \right\} \\ + \mathcal{P}_s \left\{ s'^2(1-s'^2)(1-k^2s'^2) \frac{R_{s'}\{v\} P(-s') \mathcal{L}_{s'}\{u\} + R_{s'}\{u\} Q(-s') \mathcal{L}_{s'}\{v\}}{\Pi^2 s'^2 \Psi^2(s') + \mathcal{T}^2(s')} \right\} \\ (3.3.3.) \quad p.p \ 0 < s < 1$$

$$\frac{z^2(1-z^2)(1-k^2z^2)}{T(z)} \left\{ P(z) R_z\{u\} \gamma(z; v) + Q(z) R_z\{v\} \gamma(z; u) \right\} \\ - R(z) = \\ \gamma \left(z; (1-s'^2)s'^2(1-k^2s'^2) \frac{R_{s'}\{u\} P(s') \mathcal{L}_{s'}\{v\} + R_{s'}\{v\} Q(s') \mathcal{L}_{s'}\{u\}}{\Pi^2 s'^2 \Psi^2(s') + \mathcal{T}^2(s')} \right) + \\ R_z \left\{ s'^2(1-s'^2)(1-k^2s'^2) \frac{R_{s'}\{v\} P(-s') \mathcal{L}_{s'}\{u\} + R_{s'}\{u\} Q(-s') \mathcal{L}_{s'}\{v\}}{\Pi^2 s'^2 \Psi^2(s') + \mathcal{T}^2(s')} \right\} \\ (3.3.4.) \quad z \in C - [-1, +1]$$

où $\mathcal{L}_s\{.\} = \mathcal{T}(s) . - s \Psi(s) \mathcal{P}_s\{.\}$

Considérons la fonction holomorphe dans $\text{Im } z > 0$:

$$\Phi(z) = \frac{z^2(1-z^2)(1-k^2z^2)}{T(z)} \left\{ P(z) R_z\{u\} \gamma(z; v) + Q(z) R_z\{v\} \gamma(z; u) \right\} - R(z)$$

On a :

$$\Phi(s+i0) = \frac{s^2(1-s^2)(1-k^2s^2)}{\mathcal{T}(s) + i \Pi s \Psi(s)} \left\{ P(s) R_s\{u\} \left(\mathcal{P}_s\{v\} + i \Pi v(s) \right) + Q(s) R_s\{v\} \left(\mathcal{P}_s\{u\} + i \Pi u(s) \right) \right\} \\ - R(s) , \ p.p \ 0 < s < 1$$

$$\Phi(s+i0) = \frac{s^2(1-s^2)(1-k^2s^2)}{\mathcal{C}(s) + i\pi s\Psi(-s)} \left\{ P(s) \gamma(s, v) (\mathcal{P}_{-s}\{u\} - i\pi u(-s)) \right. \\ \left. + Q(s) \gamma(s, u) (\mathcal{P}_{-s}\{v\} - i\pi v(-s)) \right\} \\ - R(s), \quad p.p -1 < s < 0$$

$$\Phi(s+i0) = \Phi(s), \quad |s| > 1$$

d'où facilement :

$$\Re \Phi(s+i0) = s^2(1-s^2)(1-k^2s^2) \left\{ \lambda(s, \Psi) [P(s) \mathcal{R}_s\{u\} \mathcal{P}_s\{v\} + Q(s) \mathcal{R}_s\{v\} \mathcal{P}_s\{u\}] \right. \\ \left. + \pi^2_{\mu}(s, \Psi) [P(s) v(s) \mathcal{R}_s\{u\} + Q(s) u(s) \mathcal{R}_s\{v\}] \right\} - R(s) \\ p.p \quad 0 < s < 1 \\ \Re \Phi(s+i0) = s^2(1-s^2)(1-k^2s^2) \left\{ \lambda(-s, \Psi) [P(s) \gamma(s, v) \mathcal{P}_{-s}\{u\} + Q(s) \gamma(s, u) \mathcal{P}_{-s}\{v\}] \right. \\ \left. + \pi^2_{\mu}(-s, \Psi) [P(s) u(-s) \gamma(s, v) + Q(s) v(-s) \gamma(s, u)] \right\} \\ - R(s)$$

$$p.p -1 < s < 0$$

$$\Im \Phi(s+i0) = \pi s^2(1-s^2)(1-k^2s^2) \left\{ \lambda(s, \Psi) [P(s) v(s) \mathcal{R}_s\{u\} + Q(s) u(s) \mathcal{R}_s\{v\}] \right. \\ \left. - \mu(s, \Psi) [P(s) \mathcal{R}_s\{u\} \mathcal{P}_s\{v\} + Q(s) \mathcal{R}_s\{v\} \mathcal{P}_s\{u\}] \right\} \\ p.p \quad 0 < s < 1$$

$$\Im \Phi(s+i0) = \pi s^2(1-s^2)(1-k^2s^2) \left\{ -\lambda(-s, \Psi) [P(s) u(-s) \gamma(s, v) + Q(s) v(-s) \gamma(s, u)] \right. \\ \left. + \mu(-s, \Psi) [P(s) \gamma(s, v) \mathcal{P}_{-s}\{u\} + Q(s) \gamma(s, u) \mathcal{P}_{-s}\{v\}] \right\} \\ p.p -1 < s < 0$$

$$\Im \Phi(s+i0) = 0, \quad |s| > 1$$

Montrons que $\Phi \in h_r$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Puisque Φ est holomorphe à l'infini et $\Phi(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$, $|z| \rightarrow +\infty$, il suffit de

voir que pour $R > 1$: $\int_{-R}^{+R} |\Phi(x+iy)|^r dx \leq k$, $\forall 0 < y \leq 1$.

C'est évident à partir des faits suivants : pour $w = u, v$:

1) $z \in \mathcal{R}_z\{w\}$ est bornée pour $\Re z \geq 0$ et $z \notin \mathcal{R}_z\{w\}$ est borné pour $\Re z \leq 0$.

2) $z(1-z) \notin \mathcal{R}_z\{w\} = \notin \mathcal{R}_z\{s'(1-s')w(s')\} + w_1 - (1-z)w_0$ et $\notin \mathcal{R}_z\{s'(1-s')w(s')\} \in h_p$, de même pour $\mathcal{R}_z\{w\}$

3) De (2.2.18.) et de la définition de $K(z)$, on a :

$$\frac{1 - k^2 z^2}{T(z)} = \alpha^{-2} \left\{ K(z) - z^2 + 1 - \frac{2\tau_1}{\pi} \right\}$$

Compte tenu du lemme 3.4., on a bien la propriété annoncée. La fonction Φ vérifie donc la relation (1.1.5.) qui s'écrit ici sous la forme (3.3.4.) (3.3.3.) et (3.3.4.) (où on a exprimé $\text{Im}\Phi(s+i0)$ sous une forme convenable.).

Lemme 3.6. Lorsque $P(z) = Q(z) = 1$, le polynôme $R(z)$ défini par (3.3.1.) est égal à :

$$(3.3.5.) \quad R(z) = -2\alpha^{-2} \left\{ C_0 z^4 + (C_2 - 2C_0) z^2 + C_0 - 2C_2 + C_4 \right\}$$

où

$$(3.3.6.) \quad C_0 = u_0 v_0$$

$$(3.3.7.) \quad C_2 = \frac{2\tau_1}{\pi} u_0 v_0 + u_0 v_2 - u_1 v_1 + u_2 v_0$$

$$(3.3.8.) \quad C_4 = \frac{2}{\pi} u_0 v_0 \left(\frac{\tau_1^2}{\pi} + \tau_3 \right) + \frac{2\tau_1}{\pi} (u_0 v_2 - u_1 v_1 + u_2 v_0)$$

$$+ u_0 v_4 - u_1 v_3 + u_2 v_2 - u_3 v_1 + u_4 v_0$$

les quantités u_i, v_i, τ_i étant respectivement les moments des fonctions u, v et τ

Développons le premier membre de (3.3.1.) suivant les puissances de $1/z$ pour $|z| > 1$. D'après (2.2.18.) on a :

$$(3.3.9.) \quad \frac{1 - k^2 z^2}{T(z)} = \alpha^{-2} (1-z) e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau) - \frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}}$$

pour $z \in C - [-1, +1]$. Pour $|z| > 1$, on a facilement :

$$e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau) - \frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}} = 1 + \frac{2 \tau_1}{\Pi z^2} + \frac{2}{\Pi z^4} \left(\tau_3 + \frac{\tau_1^2}{\Pi} \right) + O\left(\frac{1}{z^6}\right)$$

$$R_z\{u\} \gamma(z; v) + R_z\{v\} \gamma(z; u) = -\frac{2}{z^2} u_0 v_0 + \frac{1}{z^2} u_0 v_2 - u_1 v_1 + u_1 v_0 + \frac{1}{z^4} u_0 v_4 - u_1 v_3 + u_2 v_2 - u_3 v_1 + u_4 v_0 + O\left(\frac{1}{z^6}\right)$$

d'où

$$\frac{1}{z^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau) - \frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}} [R_z\{u\} \gamma(z; v) + R_z\{v\} \gamma(z; u)] =$$

$$2 \left[C_0 + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_4}{z^4} + O\left(\frac{1}{z^6}\right) \right]$$

où les C_i sont respectivement donnés par (3.3.6.), (3.3.7.) et (3.3.8.)
D'après (3.3.1.), on en déduit l'expression (3.3.5.) de $R(z)$.

Théorème 3.5. les fonctions $\beta_{\pm}(s)$ ($\varepsilon = \pm 1$) introduites dans le théorème 3.3. vérifient les relations suivantes :

$$\beta_+(s) R_s\{\beta_-\} + \beta_-(s) R_s\{\beta_+\} = 2 \frac{s \Psi(s)}{1 - k^2 s^2}$$

(3.3.10.)

p.p $0 < s < 1$

$$\mathcal{P}_s\{\beta_+\} R_s\{\beta_-\} + \mathcal{P}_s\{\beta_-\} R_s\{\beta_+\} = 2 \frac{\tau(s)}{1 - k^2 s^2}$$

(3.3.11.)

Montrons que :

$$(3.3.12.) \quad R_z\{\beta_-\} \gamma(z; \beta_+) + R_z\{\beta_+\} \gamma(z; \beta_-) = 2 \frac{T(z)}{1 - k^2 z^2}$$

pour $z \in C - [-1, +1]$.

Dans le lemme 3.5., prenons $u(s) = \beta_-(s)$ et $v(s) = \beta_+(s)$. Ces fonctions vérifient les hypothèses du lemme. De plus, par construction on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_s\{\beta_-\} &= e^{-r/s} s \Psi(s) R_s\{\beta_-\} \\ \mathcal{L}_s\{\beta_+\} &= e^{-r/s} s \Psi(s) R_s\{\beta_+\} \end{aligned}$$

En choisissant $P(z) = Q(z) = 1$, on voit que les seconds membres de (3.3.3.), (3.3.4.) et (3.3.5.) sont nuls ; en particulier la relation (3.3.5.) devient :

$$z^2 \frac{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}{T(z)} R_z\{\beta_-\} \gamma(z; \beta_+) + R_z\{\beta_+\} \gamma(z; \beta_-) = R(z) \\ z \in C - [-1, +1].$$

Faisons successivement dans cette relation $z = i\xi$, $\xi \rightarrow +0$ et $1-z^2 \rightarrow 0$, $|z| > 1$ réel. D'après le théorème de Lebesgue, dans chaque cas la limite du premier membre est nulle. Donc nécessairement :

$$R(0) = 0 \quad \text{et} \quad R(\pm 1) = 0$$

d'où d'après le lemme 3.6.

$$(3.3.13.) \quad C_4 = C_2 = C_0$$

c'est à dire :

$$R(z) = 2 C_0 \alpha^{-2} z^2 (1-z^2)$$

on a ainsi :

$$R_z\{\beta_-\} \gamma(z; \beta_+) + R_z\{\beta_+\} \gamma(z; \beta_-) = 2 \alpha^{-2} C_0 \frac{T(z)}{1 - k^2 z^2}$$

Faisons encore une fois $z = i\xi$, $\xi \rightarrow 0$: le théorème de Lebesgue implique avec (3.2.23.)

$$2 = 2 \alpha^{-2} C_0$$

c'est à dire

$$(3.3.14.) \quad C_0 = \int_0^1 \beta_+(s) ds \int_0^1 \beta_-(s) ds = \alpha^2$$

d'où (3.3.12.) . Les valeurs limites des deux membres de cette égalité fournissent (3.3.10) et (3.3.11.)

Remarque : Les égalités (3.3.13.) et (3.3.14.) entraînent, d'après (3.3.7.) et (3.3.8.) :

$$(3.3.15.) \quad \int_0^1 \beta_-(s) ds \int_0^1 s^2 \beta_+(s) ds - \int_0^1 s \beta_-(s) ds \int_0^1 s \beta_+(s) ds + \int_0^1 s^2 \beta_-(s) ds \int_0^1 \beta_+(s) ds = \alpha^2 \left(1 - \frac{\tau_1}{\Pi}\right)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \beta_-(s) ds \int_0^1 s^4 \beta_+(s) ds - \int_0^1 s \beta_-(s) ds \int_0^1 s^3 \beta_+(s) ds + \int_0^1 s^2 \beta_-(s) ds \int_0^1 s^2 \beta_+(s) ds \\ & - \int_0^1 s^3 \beta_-(s) ds \int_0^1 s \beta_+(s) ds + \int_0^1 s^4 \beta_-(s) ds \int_0^1 \beta_+(s) ds = \end{aligned}$$

$$(3.3.16.) \quad \alpha^2 \left(1 + \frac{2 \tau_1^2}{\Pi^2} - \frac{2}{\Pi} (\tau_1 + \tau_3)\right)$$

On est en mesure maintenant de déterminer dans quelles conditions la solution générale du système (3.2.7.) (3.2.8.) est aussi solution du système (3.2.5.) (3.2.6.)

Théorème 3.6. Dans le cas $k^2 \neq 1$, la solution générale (3.2.33.)-(3.2.34.) du système (3.2.7.)-(3.2.8.) est solution du système (3.2.5.)-(3.2.6.) si et seulement si les paramètres a et b vérifient la condition suivante :

$$(3.3.17.) \quad ab = k^2$$

Calculons $s \{ \sigma_1(s) R_s \{ \sigma_1 \} - \sigma_2(s) R_s \{ \sigma_2 \} \} = D(s)$ où $\sigma_1(s)$ est donnée par (3.2.23.) et $\sigma_2(s)$ par (3.2.24.). On a :

$$\begin{aligned}
 D(s) &= \frac{a}{2} \beta_+(s) \left\{ s b R_s \{ \beta_- \} + \frac{1}{2} s R_s \left\{ \frac{\beta_+(s') + \beta_-(s')}{s'} \right\} + \frac{1}{2} s R_s \left\{ \frac{\beta_+(s') - \beta_-(s')}{s'} \right\} \right\} \\
 &+ \frac{b}{2} \beta_-(s) \left\{ a s R_s \{ \beta_+ \} + \frac{1}{2} s R_s \left\{ \frac{\beta_+(s') + \beta_-(s')}{s'} \right\} - \frac{1}{2} s R_s \left\{ \frac{\beta_+(s') - \beta_-(s')}{s'} \right\} \right\} \\
 &+ \frac{1}{4} (\beta_+(s) + \beta_-(s)) R_s \left\{ \frac{\beta_+(s') + \beta_-(s')}{s'} \right\} - \frac{1}{4} (\beta_+(s) - \beta_-(s)) R_s \left\{ \frac{\beta_+(s') - \beta_-(s')}{s'} \right\} \\
 &+ \frac{1}{4} (\beta_+(s) + \beta_-(s)) \left\{ a R_s \{ \beta_+ \} + b R_s \{ \beta_- \} \right\} \\
 &+ \frac{1}{4} (\beta_+(s) - \beta_-(s)) \left\{ a R_s \{ \beta_+ \} - b R_s \{ \beta_- \} \right\} = \\
 &\frac{1}{2} \beta_+(s) R_s \left\{ \frac{\beta_-(s')}{s'} \right\} + \frac{1}{2} \beta_-(s') R_s \left\{ \frac{\beta_+(s')}{s'} \right\} \\
 &+ \frac{a}{2} \beta_+(s) \left\{ b s R_s \{ \beta_- \} + s R_s \left\{ \frac{\beta_+(s')}{s'} \right\} + R_s \{ \beta_+ \} \right\} \\
 &+ \frac{b}{2} \beta_-(s) \left\{ a s R_s \{ \beta_+ \} + s R_s \left\{ \frac{\beta_-(s')}{s'} \right\} + R_s \{ \beta_- \} \right\}
 \end{aligned}$$

Compte tenu de

$$s R_s \left\{ \frac{\beta_\varepsilon(s')}{s'} \right\} = 1 - R_s \{ \beta_\varepsilon \} , \quad \varepsilon = \pm 1.$$

il vient

$$\begin{aligned}
 D(s) &= \frac{1}{2} \beta_+(s) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} R_s \{ \beta_- \} \right) + \frac{1}{2} \beta_-(s) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} R_s \{ \beta_+ \} \right) \\
 &+ \frac{a}{2} \beta_+(s) \left\{ b s R_s \{ \beta_- \} + 1 \right\} + \frac{b}{2} \beta_-(s) \left\{ a s R_s \{ \beta_+ \} + 1 \right\} \\
 &= \sigma_1(s) + \beta_+(s) R_s \{ \beta_- \} \left(\frac{a b}{2} s - \frac{1}{2 s} \right) + \beta_-(s) R_s \{ \beta_+ \} \left(\frac{a b}{2} s - \frac{1}{2 s} \right) \\
 &= \sigma_1(s) - \left(\frac{1}{2 s} - \frac{a b}{2} s \right) \left\{ \beta_+(s) R_s \{ \beta_- \} + \beta_-(s) R_s \{ \beta_+ \} \right\}
 \end{aligned}$$

D'après (3.3.10.) :

$$D(s) = \sigma_1(s) - \frac{1 - a b s^2}{1 - k^2 s^2} \Psi(s)$$

On voit que (3.2.5.) est vérifiée par σ_1, σ_2 si et seulement si la condition (3.3.17.) est satisfaite.

Le même genre de calcul montre que :

$$s \left\{ \sigma_1(s) \mathcal{P}_s \{\sigma_2\} - \sigma_2(s) \mathcal{P}_s \{\sigma_1\} \right\} = \sigma_2(s) - \left(\frac{1}{2s} - \frac{a b}{2} s \right) \left(\beta_-(s) \mathcal{P}_s \{\beta_+\} - \beta_+(s) \mathcal{P}_s \{\beta_-\} \right)$$

Or une conséquence de (3.20.) est la relations suivante :

$$(3.3.18.) \quad \beta_-(s) \mathcal{P}_s \{\beta_+\} - \beta_+(s) \mathcal{P}_s \{\beta_-\} = e^{-r/s} \left\{ \beta_-(s) \mathcal{R}_s \{\beta_+\} + \beta_+(s) \mathcal{R}_s \{\beta_-\} \right\}$$

d'où la conclusion d'après (3.3.10.) que (3.2.6.) est vérifiée dans les conditions annoncées.

Remarque : l'utilisation des fonctions β_ε permet d'écrire directement la condition de compatibilité (3.3.17.) sous une forme canonique [14].

§ 4. La solution (3.2.21.) de l'équation (3.2.20.) permet de définir la fonction suivante $W_\varepsilon(s)$

$$(3.4.1.) \quad \hat{\rho}_\varepsilon(s) = W_\varepsilon(s) \Psi(s)$$

c'est à dire :

$$W_\varepsilon(s) = s \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} - \varepsilon \lambda(s; \Psi) e^{-r/s} \hat{\chi}_\varepsilon(s) - \varepsilon s \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s \{\tau\}} \mathcal{P}_s \left\{ \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_{s'} \{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1-s')} e^{-r/s} \hat{\chi}_\varepsilon(s') \right\}$$

(3.4.2.)

$$0 < s < 1$$

Compte tenu de (2.5.1.) et (2.5.3.), on a :

$$e^s \left\{ \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} \right\} + \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} e^{\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\lambda(s'; \Psi)}{s (1 - s)} - \frac{\alpha^{-1}}{s} - \frac{A \alpha^{-2}}{1 - s} = 0$$

de sorte que (3.4.2.) peut s'écrire :

$$W_\epsilon(s) = s \frac{1 + s}{1 - k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} - \epsilon s \frac{1 - s^2}{1 - k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} e^{-r/s} \hat{\chi}_\epsilon(s) \left\{ \frac{\alpha^{-1}}{s} + \frac{A \alpha^{-2}}{1 - s} \right\}$$

$$- \epsilon s \frac{1 - s^2}{1 - k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \int_0^1 \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} e^{-\frac{r}{s'}} \frac{\hat{\chi}_\epsilon(s') - e^{-r/s} \hat{\chi}_\epsilon(s)}{s' - s} ds'$$

(3.4.3.)

Sous cette forme, on voit que (3.4.3.) est définie et méromorphe pour $s \in C - [-1, 0]$. En fait :

Lemme 3.7. La fonction $W_\epsilon(s)$ vérifie la relation suivante :

$$(3.4.4.) \quad W_\epsilon(-s + i0) = \epsilon e^{r/s} W_\epsilon(s), \quad 0 < s \leq 1$$

Par conséquent elle est holomorphe dans $C - \{0\}$ sauf aux points $\pm k^{-1}$

Dans (3.4.3.) prenons $s = z$ et faisons $z \rightarrow -s + i0$ avec $0 < s \leq 1$; il vient :

$$W_\epsilon(-s + i0) = -s \frac{1 - s}{1 - k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} + i \tau(s)$$

$$+ \epsilon s \frac{1 - s^2}{1 - k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} + i \tau(s) e^{-r/s} \hat{\chi}_\epsilon(-s + i0) \left\{ -\frac{\alpha^{-1}}{s} + \frac{A \alpha^{-2}}{1 + s} \right\}$$

$$+ \epsilon s \frac{1 - s^2}{1 - k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} + i \tau(s) \int_0^1 \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} e^{-\frac{r}{s'}} \frac{\hat{\chi}_\epsilon(s') - e^{-r/s} \hat{\chi}_\epsilon(-s + i0)}{s' + s} ds'$$

Or de (2.5.2.) et (2.5.4.) où $S(s) = 1$ et $z = -s$, on a :

$$\alpha^2 R_s \left\{ \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} \right\} - \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}}}{s} + \frac{\alpha}{s} \frac{A}{1 - s} = 0$$

(3.4.5.)

donc :

$$W_E(-s + i0) = \frac{s(1-s)}{1 - k^2 s^2} e^{\frac{-1}{\Pi} \mathcal{P}_s \{\tau\} + i \pi(s)} \left(-1 - \varepsilon(1+s) e^{-\frac{r/s}{\chi_E(-s+i0)}} \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}}}{s} \right)^2$$

$$+ \varepsilon(1+s) R_s \left\{ \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} e^{-\frac{r/s'}{\chi_E(s')}} \right\}$$

Mais d'après (3.2.22.) et (3.2.17.), on a :

$$\varepsilon R_s \left\{ \frac{1 - k^2 s'^2}{1 + s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s' (1 - s')} e^{-\frac{r/s'}{\chi_E(s')}} \right\} = \frac{\alpha^{-2}}{s} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}} \frac{\alpha^2 s}{1 + s} e^{\frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\}}$$

$$= \tilde{\chi}_E(s)$$

donc :

$$W_E(-s + i0) = -\alpha^{-2} s \frac{1 - s^2}{1 - k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} \mathcal{P}_s \{\tau\} - \frac{1}{\Pi} R_s \{\tau\} + i \pi(s)} \frac{\hat{\chi}_E(s)}{s}$$

$$+ \varepsilon \frac{e^{-\frac{r/s}{\chi_E(-s+i0)}}}{s} \hat{\chi}_E(-s + i0)$$

De (3.2.15.), on a :

$$\hat{\chi}_E(s) = s R_s \{ \hat{\rho}_E \}$$

$$\hat{\chi}_E(-s + i0) = -s \mathcal{P}_s \{ \hat{\rho}_E \} + i \Pi s \hat{\rho}_E(s)$$

donc :

$$W_{\varepsilon}(-s + i0) = -\alpha^{-2} s \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{r/s}{\Pi} \mathcal{P}_s\{\tau\} - \frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\} + i \tau(s)} \left\{ \mathcal{R}_s\{\hat{\rho}_{\varepsilon}\} + \varepsilon \frac{e^{r/s}}{s} \left[-s \mathcal{P}_s\{\hat{\rho}_{\varepsilon}\} + i \Pi s \hat{\rho}_{\varepsilon}(s) \right] \right\}$$

Compte tenu de (3.2.20.), on peut enfin écrire, en éliminant $\mathcal{P}_s\{\hat{\rho}_{\varepsilon}\}$:

$$W_{\varepsilon}(-s + i0) = -\alpha^{-2} s \frac{1-s^2}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{r/s}{\Pi} \mathcal{P}_s\{\tau\} - \frac{1}{\Pi} \mathcal{R}_s\{\tau\} + i \tau(s)} \varepsilon \hat{\rho}_{\varepsilon}(s) \left\{ i \Pi - \frac{\tau(s)}{s \Psi(s)} \right\}$$

Compte tenu enfin de (2.2.19.) et de (2.2.2.), on a après quelques calculs :

$$W_{\varepsilon}(-s + i0) = \varepsilon e^{\frac{r/s}{\Psi(s)} \hat{\rho}_{\varepsilon}(s)} = \varepsilon e^{\frac{r/s}{\Psi(s)}} W_{\varepsilon}(s)$$

Les mêmes calculs conduiraient à l'égalité :

$$W_{\varepsilon}(-s - i0) = \varepsilon e^{\frac{r/s}{\Psi(s)}} W_{\varepsilon}(s)$$

La fonction $W_{\varepsilon}(s)$ est bien analytique et méromorphe dans $C - \{0\}$

Le lemme suivant donne le comportement à l'origine et à l'infini de la fonction $W_{\varepsilon}(z)$

Lemme 3.8. On a :

$$\frac{W_{\varepsilon}(z)}{z} = \alpha (1 - \varepsilon \theta_{-1}^{(\varepsilon)}) + \frac{(1 - \varepsilon \theta_{-1}^{(\varepsilon)})}{\Pi} z \int_0^1 \frac{\tau(s)}{s(s+z)} ds (1 + o(1))$$

(3.4.6.) $|z| \rightarrow 0$, $\Re z > 0$

la convergence étant uniforme dans les secteurs $\eta \leq |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$
avec $0 < \eta < \frac{\pi}{4}$

Lorsque $z = i\xi$:

$$\frac{W_\varepsilon(i\xi)}{i\xi} = \alpha(1 - \varepsilon \theta_{-1}^{(\varepsilon)}) - \varepsilon \alpha(1 - \varepsilon \theta_{-1}^{(\varepsilon)}) e^{\frac{ir}{\xi}} + o(1)$$

$$(3.4.7.) \quad \xi \rightarrow +\infty$$

En ce qui concerne le comportement à l'infini, on a :

Lorsque $k^2 \neq 0$:

$$\frac{W_\varepsilon(z)}{z} = - \frac{(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)})}{k^2 z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$(3.4.8.) \quad |z| \rightarrow +\infty$$

Lorsque $k^2 = 0$:

$$\frac{W_\varepsilon(z)}{z} = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)}) z + (1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)}) \left(\frac{\tau_0}{\pi} (\varepsilon - 1) - \varepsilon r \right) + (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon \theta_1^{(\varepsilon)})$$

$$(3.4.9.) \quad |z| \rightarrow +\infty \quad + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

où les $\theta_n^{(\varepsilon)}$ sont définis par (3.2.25.)

Démontrons (3.4.6.) d'abord pour $z = s$, $0 < s \leq 1$. On utilise la forme (3.4.3.) de $W_\varepsilon(s)$. Considérons l'intégrale figurant dans le troisième terme :

$$\int_0^1 f(s') \frac{e^{-r/s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s') - e^{-r/s} \hat{\chi}_\varepsilon(s)}{s' - s} ds' = \int_0^s + \int_s^1$$

où on a posé, pour simplifier :

$$f(s) = \frac{1 - k^2 s^2}{1 + s} e^{\frac{1}{\pi} R_s\{\tau\}} \frac{\mu(s; \Psi)}{s(1 - s)}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^s f(s') \frac{e^{-r/s'} - e^{-r/s}}{s' - s} \hat{\chi}_\varepsilon(s') ds' + e^{-r/s} \int_0^s f(s') \frac{\hat{\chi}_\varepsilon(s') - \hat{\chi}_\varepsilon(s)}{s' - s} ds' \\ = e^{-r/s} \int_0^s f(s') \frac{1 - e^{-r(\frac{1}{s'} - \frac{1}{s})}}{s - s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s') ds' + o(e^{-r/s}) \end{aligned}$$

car, d'après les résultats précédents, la fonction $\hat{\chi}_\varepsilon$ vérifie une condition de Lipschitz uniforme sur $[0,1]$. Ensuite :

$$\left| \int_0^s \right| \leq r \frac{e^{-r/s}}{s} \int_0^s f(s') \frac{\hat{\chi}_\varepsilon(s')}{s'} ds' + o(e^{-r/s}) = o(e^{-r/s})$$

$s \rightarrow +0$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_s^1 f(s') e^{-r/s'} \frac{\hat{\chi}_\varepsilon(s')}{s'} ds' + \int_s^1 ds' f(s') \left\{ e^{-r/s'} \frac{\hat{\chi}_\varepsilon(s') - e^{-r/s} \hat{\chi}_\varepsilon(s)}{s' - s} - e^{-r/s} \frac{\hat{\chi}_\varepsilon(s')}{s'} \right\} \\ = \theta_{-1}(\varepsilon) \int_0^s f(s') e^{-r/s'} \frac{\hat{\chi}_\varepsilon(s')}{s'} ds' + \int_s^1 f(s') \frac{s e^{-r/s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s') - s' e^{-r/s} \hat{\chi}_\varepsilon(s)}{s' (s' - s)} ds' \\ = \theta_{-1}(\varepsilon) + o(e^{-r/s}) + s \int_s^1 f(s') \frac{e^{-r/s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s') - e^{-r/s} \hat{\chi}_\varepsilon(s)}{s' (s' - s)} ds' \\ \quad - e^{-r/s} \hat{\chi}_\varepsilon(s) \int_s^1 f(s') \frac{ds'}{s'} \\ = \theta_{-1}(\varepsilon) + s \int_s^1 f(s') e^{-r/s'} \frac{\hat{\chi}_\varepsilon(s') - \hat{\chi}_\varepsilon(s)}{s' (s' - s)} ds' + s \hat{\chi}_\varepsilon(s) \int_s^1 f(s') e^{-r/s'} \frac{1 - e^{-r/s}}{s' (s' - s)} ds' \\ \quad + o(e^{-r/s}) \end{aligned}$$

$$= \theta_{-1}^{(\varepsilon)} + O(s) + s \hat{\chi}_\varepsilon(s) \int_s^1 f(s') e^{-r/s} \frac{1 - e^{-r(\frac{1}{s} - \frac{1}{s'})}}{s'(s' - s)} ds'$$

$$= \theta_{-1}^{(\varepsilon)} + O(s)$$

On a donc d'après (3.4.3.)

$$\frac{W_\varepsilon(s)}{s} = \frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} \left\{ 1 - \varepsilon(1-s) (\theta_{-1}^{(\varepsilon)} + O(s)) \right\} + O(e^{-r/s})$$

$s \rightarrow +0$

On trouve tout de suite que :

$$\frac{1+s}{1-k^2 s^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_s\{\tau\}} = \alpha + \frac{\alpha}{\Pi} s \int_0^1 \frac{(s')}{s'(s'+s)} ds' (1 + o(1))$$

$$(3.4.10.) \quad s \rightarrow +0$$

d'où (3.4.6.) lorsque $0 < s$, $s \rightarrow +0$

Prenons maintenant dans (3.4.3.) $s = z \in C - [-1, +1]$.

D'après (2.5.2.) et (2.5.4.) où $S(z) = 1$, on a :

$$\alpha^2 \gamma \left(z; \frac{1-k^2 s'^2}{1+s'} e^{\frac{1}{\Pi} R_{s'}\{\tau\}} \frac{\mu(s'; \Psi)}{s'(1-s')} \right) + \frac{e^{-\frac{1}{\Pi} \gamma(z; \tau)}}{z} - \frac{\alpha}{z} - \frac{A}{1-z} = 0$$

de sorte que, (3.4.3.) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{W_\varepsilon(z)}{z} = \frac{1+z}{1-k^2 z^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}} - \varepsilon \frac{1-z^2}{1-k^2 z^2} e^{-\frac{1}{\Pi} R_z\{\tau\}} \gamma \left(z; f(s') e^{-r/s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s') \right)$$

$$(3.4.11.) \quad - \frac{\varepsilon}{T(z)} e^{-r/z} \frac{\hat{\chi}_\varepsilon(z)}{z}$$

où pour le troisième terme, on a utilisé (2.2.18.) .

Or :

$$\gamma(z; f(s') e^{-r/s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s')) = \theta_{-1}^{(\varepsilon)} + z \int_0^1 f(s') \frac{e^{-r/s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s')}{s' (s' - z)} ds'$$

(3.4.12.)

$$\text{Mais } \left| \frac{z}{s' - z} \right| \leq \frac{1}{\sin \eta}$$

$$(3.4.13.) \text{ pour } \eta \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \text{ avec } 0 < \eta < \frac{\pi}{4}$$

Le théorème de Lebesgue appliqué deux fois à l'intégrale du second membre de (3.4.12.) montre que :

$$\gamma(z; f(s') e^{-r/s'} \hat{\chi}_\varepsilon(s')) = \theta_{-1}^{(\varepsilon)} + o(z)$$

lorsque $|z| \rightarrow 0$ et cela uniformément $\forall \arg z$ dans les secteurs (3.4.13.). Ensuite :

$$\frac{\varepsilon}{T(z)} e^{-r/z} \frac{\hat{\chi}_\varepsilon(z)}{z} = o(|e^{-r/z}|), \quad |z| \rightarrow 0$$

uniformément $\forall \arg z$ dans $\eta \leq |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$

car

$$e^{-r/z} \rightarrow 0 \text{ uniformément } \forall |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$$

$$T(z) \rightarrow 1 \text{ uniformément } \forall \eta \leq |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\chi_\varepsilon(z)}{z} \rightarrow \int_0^1 \hat{\rho}_\varepsilon(s) ds, \text{ uniformément } \forall |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$$

lorsque $|z| \rightarrow 0$.

D'autre part, il est facile de voir qu'en fait (3.4.10.) a lieu uniformément $\forall |arg z| \leq \frac{\pi}{2}$. La relation (3.4.6.) est ainsi démontrée pour $Re z > 0$.

Lorsque $z = i\xi$, on a :

$$-\frac{\varepsilon}{T(i\xi)} e^{\frac{ri}{\xi}} \frac{\hat{\chi}_\varepsilon(i\xi)}{i\xi} = -\varepsilon (1 - \varepsilon \theta_{-1}(\varepsilon)) e^{\frac{ri}{\xi}} (1 + o(1))$$

$$\xi \rightarrow +\infty$$

car

$$\frac{1}{T(i\xi)} = 1 - 2 \xi^2 \int_0^1 \frac{\Psi(s)}{s^2 + \xi^2} ds \quad (1 + o(1))$$

$$\frac{\hat{\chi}_\varepsilon(i\xi)}{i\xi} = \int_0^1 \frac{\hat{\rho}_\varepsilon(s')}{s' + i\xi} ds' = \int_0^1 \frac{\hat{\rho}_\varepsilon(s')}{s'} ds' - i\xi \int_0^1 \frac{\hat{\rho}_\varepsilon(s')}{s' (s' + i\xi)} ds'$$

$$= \alpha (1 - \varepsilon \theta_{-1}(\varepsilon)) - i\xi \int_0^1 \frac{\hat{\rho}_\varepsilon(s')}{s' (s' + i\xi)} ds'$$

d'où (3.4.7.).

Pour établir (3.4.8.) et (3.4.9.), revenons à (3.4.11.).

Lorsque $k^2 \neq 0$, on a :

$$(3.4.14.) \quad \frac{1}{T(z)} = (1 - 2\Psi_0)^{-1} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right\}, \quad |z| \rightarrow +\infty$$

Lorsque $k^2 = 0$, ($1 - 2\Psi_0 = 0$), on a :

$$(3.4.15.) \quad \frac{1}{T(z)} = \frac{z^2}{2\Psi_2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right\}, \quad |z| \rightarrow +\infty$$

D'autre part :

(3.4.16.)

$$\frac{\hat{\chi}_\varepsilon(z)}{z} = \int_0^1 \frac{\hat{\rho}_\varepsilon(s)}{s+z} ds = \frac{1}{z} \left[\int_0^1 \hat{\rho}_\varepsilon(s) ds - \frac{1}{z} \int_0^1 s \hat{\rho}_\varepsilon(s) ds + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right]$$

$|z| \rightarrow +\infty$

Or de (3.2.22.) où on développe les deux membres suivant les puissances de $1/z$, on trouve facilement :

$$(3.4.17.) \quad \int_0^1 \hat{\rho}_\varepsilon(s) ds = \alpha^2 (1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)})$$

$$(3.4.18.) \quad \int_0^1 s \hat{\rho}_\varepsilon(s) ds = \alpha^2 \left[1 - \theta_1^{(\varepsilon)} - \frac{\tau_0}{\Pi} (1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)}) \right]$$

Développons maintenant le second membre de (3.4.11.) suivant les puissances de $1/z$:

$$\begin{aligned} \frac{W_\varepsilon(z)}{z} &= \frac{1+z}{1-k^2 z^2} \left[1 - \frac{\tau_0}{\Pi z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] \left[1 + \varepsilon \left(\frac{1-z}{z} \right) \theta_0^{(\varepsilon)} + \frac{\theta^{(\varepsilon)}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{T(z)} \left[1 - \frac{\tau}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] \left[\frac{\alpha^2(1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)})}{z} - \frac{\alpha^2 \{ 1 - \varepsilon \theta_1^{(\varepsilon)} - \frac{\tau_0}{\Pi} (1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)}) \}}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \right] \end{aligned}$$

compte tenu de (3.4.16.), (3.4.17.) et (3.4.18.).

Lorsque $k^2 \neq 0$, d'après (3.4.14.), on trouve :

$$\frac{W_\varepsilon(z)}{z} = (1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)}) \left(\frac{1}{k^2} + \frac{\varepsilon \alpha^2}{1 - 2\Psi_0} \right) \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

c'est à dire, d'après (2.2.17.) et (2.2.20.), l'expression (3.4.8.) .

Lorsque $k^2 = 0$, on trouve, d'après (3.4.15.) :

$$\begin{aligned} \frac{W_\varepsilon(z)}{z} &= (1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)}) \left(1 + \frac{\alpha^2 \varepsilon}{2 \Psi_2} \right) z + \varepsilon (\theta_0^{(\varepsilon)} - \theta_1^{(\varepsilon)}) \\ &+ (1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)}) \left(1 - \frac{\tau_0}{\Pi} \right) - \frac{\varepsilon \alpha^2}{2 \Psi_2} \left\{ r (1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)}) + 1 - \varepsilon \theta_1^{(\varepsilon)} - \frac{\tau_0}{\Pi} (1 - \varepsilon \theta_0^{(\varepsilon)}) \right\} \\ &+ O\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

et d'après (2.2.17.) et (2.2.20.) $\alpha^2 = 2 \Psi_2$, d'où l'expression (3.4.9.)

§ 5. Introduisons les fonctions suivantes U et V par :

$$(3.5.1.) \quad U(s) \Psi(s) = \frac{1}{2} \frac{\beta_+(s) + \beta_{-'}(s)}{s}$$

$$0 < s < 1$$

$$(3.5.2.) \quad V(s) \Psi(s) = \frac{1}{2} \frac{\beta_{-'}(s) - \beta_+(s)}{s}$$

Mais d'après (3.2.29.) et (3.4.1.) :

$$\beta_\varepsilon(s) = \frac{1}{\alpha (1 - \varepsilon \theta_{-1}^{(\varepsilon)})} \quad \hat{\rho}_\varepsilon(s) = \frac{1}{\alpha (1 - \varepsilon \theta_{-1}^{(\varepsilon)})} \Psi(s) W_\varepsilon(s)$$

de sorte qu'on peut écrire $U(s)$ et $V(s)$ sous la forme :

$$(3.5.3.) \quad U(s) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha(1-\theta_{-1}^{(+)})} \frac{W_+(s)}{s} + \frac{1}{\alpha(1+\theta_{-1}^{(-)})} \frac{W_-(s)}{s} \right\}$$

$$(3.5.4.) \quad V(s) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha(1+\theta_{-1}^{(-)})} \frac{W_-(s)}{s} - \frac{1}{\alpha(1-\theta_{-1}^{(+)})} \frac{W_+(s)}{s} \right\}$$

D'après ces expressions et les résultats du paragraphe précédents ces fonctions sont holomorphes dans $C - \{0\}$. Le lemme 3.7. permet de décrire leur comportement au voisinage de l'origine et au voisinage de l'infini.

Compte tenu de (3.4.6.) et (3.4.7.), on a :

$$(3.5.5.) \quad U(z) = 1 + \frac{1}{\pi} z \int_0^1 \frac{\tau(s)}{s(1+z)} ds \quad (1 + o(1))$$

$$(3.5.6.) \quad V(z) = o \left(z \int_0^1 \frac{\tau(s)}{s(s+z)} ds \right)$$

lorsque $|z| \rightarrow 0$, $\Re z > 0$, la convergence étant uniforme dans

$$\eta \leq |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \eta, \quad 0 < \eta < \frac{\pi}{4}$$

$$(3.5.7.) \quad U(i\xi) = 1 + o(1)$$

$$V(i\xi) = e^{\frac{ir}{\xi}} + o(1), \quad \xi \rightarrow +\infty$$

Il serait facile, d'après les calculs du lemme 3.7., de préciser le $o(1)$ dans les formules ci dessus.

A l'infini, lorsque $|z| \rightarrow +\infty$

Si $\kappa^2 \neq 0$:

$$(3.5.9.) \quad U(z) = - \frac{1}{\alpha \kappa^2} \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$(3.5.10.) \quad V(z) = \frac{1}{\alpha \kappa} \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

d'après (3.4.8.)

Si $\kappa^2 = 0$; d'après (3.4.9.) :

$$U(z) = \frac{1}{\alpha} \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} z + \frac{1}{2} \left\{ - \frac{r}{\alpha} \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} + \frac{(1 + \theta_0^{(-)})(r - 2 \frac{\tau_0}{\Pi}) + 2(1 + \theta_1^{(-)})}{\alpha (1 + \theta_{-1}^{(-)})} \right\}$$

$$(3.5.11.) \quad + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$V(z) = - \frac{1}{\alpha} \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} z + \frac{1}{2} \left\{ \frac{r}{\alpha} \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} + \frac{(1 + \theta_0^{(-)})(r - 2 \frac{\tau_0}{\Pi}) + 2(1 + \theta_1^{(-)})}{\alpha (1 + \theta_{-1}^{(-)})} \right\} + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

(3.5.12.)

Remarquons que les fonctions U et V sont holomorphes sauf pour $z = \pm \kappa^{-1}$ dans $0 < |z| < +\infty$ lorsque $\kappa^2 \neq 0$, alors que dans le cas $\kappa^2 = 0$, elles le sont seulement dans $0 < |z| < +\infty$. On peut énoncer :

Théorème 3.7. Soit Ψ vérifiant H_1 et H_2 et $\Psi \in N_p^{(0)}[0,1]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$.

Si $\kappa^2 < 1$, la solution générale du système de Chandresahkar est donnée par :

$$(3.5.13.) \quad X(s) = \frac{a}{2} s \left(U(s) - V(s) \right) + \frac{b}{2} s \left(U(s) + V(s) \right) + U(s)$$

$$(3.5.14.) \quad Y(s) = \frac{a}{2} s \left(U(s) - V(s) \right) - \frac{b}{2} s \left(U(s) + V(s) \right) + V(s)$$

où les paramètres a et b sont réels et assujettis à vérifier :

$$(3.5.15.) \quad ab = k^2$$

Lorsque $k^2 \neq 0$ (resp. $k^2 = 0$), cette solution générale est holomorphe dans $0 < |z| \leq +\infty$ sauf aux points $\pm k^{-1}$ (resp. $0 < |z| < +\infty$)

De plus :

$$(3.5.15.) \quad \begin{aligned} X(z) &= U(z) + O(z) \\ Y(z) &= V(z) + O(z) \end{aligned}$$

lorsque $|z| \rightarrow 0$, $\Re z \geq 0$.

Lorsque $|z| \rightarrow +\infty$, :

si $k^2 \neq 0$:

$$(3.5.16.) \quad \begin{aligned} X(z) &= -\frac{a}{\alpha k^2} \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} + O\left(\frac{1}{z}\right) \\ Y(z) &= -\frac{a}{\alpha k^2} \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} + O\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

si $k^2 = 0$:

$$(3.5.17.) \quad \begin{aligned} X(z) &= \frac{a}{\alpha} \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} z^2 + \left\{ \frac{b}{2} \frac{(1 + \theta_0^{(-)}) \left(r - \frac{2\tau_0}{\Pi}\right) + 2(1 + \theta_{-1}^{(-)})}{1 + \theta_{-1}^{(-)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} \left(1 - \frac{ar}{2}\right) \right\} \frac{z}{\alpha} + O(1) \\ Y(z) &= \frac{a}{\alpha} \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} z^2 - \left\{ \frac{b}{2} \frac{(1 + \theta_0^{(-)}) \left(r - \frac{2\tau_0}{\Pi}\right) + 2(1 + \theta_{-1}^{(-)})}{1 + \theta_{-1}^{(-)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \theta_0^{(+)}}{1 - \theta_{-1}^{(+)}} \left(\frac{ar}{2} - 1\right) \right\} \frac{z}{\alpha} + O(1) \end{aligned}$$

La solution générale du système (3.2.5.)-(3.2.6.) est donnée par (3.2.33.)-(3.2.34.) où a et b vérifient (3.3.17.). D'après (3.2.4.), la solution générale du système (3.2.1.)-(3.2.2.) est bien de la forme (3.5.13.)-(3.5.14.) compte tenu de la définition des fonctions U et V . Les expressions asymptotiques de $X(z)$ et $Y(z)$ s'obtiennent facilement à l'aide de celles de $U(z)$ et $V(z)$.

Remarque 1. Il serait facile de préciser le premier terme du $O(1)$ dans les expressions (3.5.17.) en poussant un peu plus loin le développement de (3.4.9.).

Remarque 2. Le couple (U, V) n'est solution du système de Chandraschkar que si $\kappa^2 = 0$.

Remarque 3. Dans le cas $\kappa^2 = 0$, la solution générale (3.5.17.) est composée de deux familles de solutions dépendant d'un paramètre ; pour l'une, définie par $a \neq 0$, $b = 0$, on a :

(3.5.18.) $X(z) = O(z^2)$, $Y(z) = O(z^2)$, $|z| \rightarrow +\infty$;
et pour l'autre, définie par $a = 0$, b réel quelconque, on a :

(3.5.19.) $X(z) = O(z)$, $Y(z) = O(z)$, $|z| \rightarrow +\infty$

Remarque 4. Considérons les moments suivants :

$$x_n = \int_0^1 s^n X(s) \Psi(s) ds ; \quad y_n = \int_0^1 s^n Y(s) \Psi(s) ds$$

$$u_n = \int_0^1 s^n U(s) \Psi(s) ds ; \quad v_n = \int_0^1 s^n V(s) \Psi(s) ds$$

où $n \geq 0$, les fonctions $X(s)$ et $Y(s)$ étant respectivement données par (3.5.13.) et (3.5.14.). D'après la définition (3.5.1.) - (3.5.2.), on a :

$$(3.5.18.) \quad U_0 = 1 ; \quad V_0 = 0$$

$$(3.5.19.) \quad U_1 = \frac{1}{2} \left(\beta_+^0 + \beta_-^0 \right) ; \quad V_1 = \frac{1}{2} \left(\beta_-^0 - \beta_+^0 \right)$$

en notant
$$\beta_\varepsilon^n = \int_0^1 s^n \beta_\varepsilon(s) ds$$

On a ainsi pour x_0 et y_0 , compte tenu de (3.5.18.) et (3.5.19.) :

$$x_0 = \frac{a}{2} \beta_+^0 + \frac{b}{2} \beta_-^0 + 1$$

(3.5.20.)

$$y_0 = \frac{a}{2} \beta_+^0 - \frac{b}{2} \beta_-^0$$

d'où

$$(x_0 - 1 + y_0) (x_0 - 1 - y_0) = a b \beta_+^0 \beta_-^0 = k^2 \alpha^2$$

d'après (3.5.15.) et (3.3.14.), c'est à dire d'après (2.2.17.) et (2.2.20.) :

$$(3.5.21.) \quad (x_0 - 1)^2 - y_0^2 = 1 - 2 \Psi_0$$

Cette relation est ainsi valable pour toute solution du système de Chandraschkar ; elle est démontrée dans [9] seulement pour la solution obtenue à partir d'une certaine équation auxiliaire

Appelons, suivant Chandraschkar, solutions standards du système (3.5.13.) et (3.5.14.) celles pour lesquelles

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_0 = 0$$

D'après (3.5.21.), elles ne peuvent exister que dans le cas conservatif ($k^2 = 0$) et d'après (3.5.20.), (3.3.14.), dans ce cas, il y en a une seule à savoir le couple (U, V) .

§ 6 - Lorsque $\kappa^2 = 1$, il est facile de voir que la fonction (3.2.14.) où $M = 0$ fournit une solution du système de Chandrasehkar : c'est la seule et elle est holomorphe dans $C - \{0\}$.

Dans le cas où $\kappa^2 < 1$, il est possible de déterminer de façon unique les paramètres a et b pour que la solution obtenue soit holomorphe dans $C - \{0\}$. D'où l'énoncé :

Théorème 3.8. Le système de Chandrasehkar possède dans tous les cas une solution unique holomorphe dans $C - \{0\}$.

On retrouve le résultat de Mullikin [3].

APPENDICE

En fait, on a $PL = P$. Car $Im \Phi(x+iy)$ converge vers $Im \Phi(x+i0) = \mu'(x)$ en tout point x où $\mu'(x)$ existe d'après le théorème de Fatou [16]. D'autre part, il est facile de voir que $\lim_{y \rightarrow +0} R \Phi(x+iy)$ et

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(s)}{s-x}$$

où l'intégrale est prise au sens de la valeur principale, existent en même temps ; or d'après [17], l'intégrale (*) existe presque partout.

Le point de vue adopté dans le texte permet de montrer facilement que $PL = P$. En effet, soit $\Phi \in P$. On peut toujours écrire :

$$\Phi(z) = \int_{-T}^{+T} \frac{d\mu(s)}{s-z} + \int_{|s| \geq T} \frac{d\mu(s)}{s-z}$$

pour chaque $T > 0$.

Alors pour presque partout x de $[-T+\varepsilon, T-\varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < \frac{T}{2}$), le second membre ci-dessus possède une limite finie lorsque $y \rightarrow +0$, puisque la première intégrale appartient à $\tilde{P} \subset PN \subset PL$. Ce résultat fournit une démonstration élémentaire du fait que l'intégrale (*) existe presque partout pour toute fonction μ à variation bornée sur $[-\infty, +\infty]$.

REFERENCES

- [1] *I.W. BUSBRIDGE*. The mathematics of radiative transfer. Cambridge univ. Press. (1960)
- [2] *T.W. MULLIKIN*. A complete solution of the X and Y equations of Chandrasehkar. *Astro. J.* 136 (1962) p. 627-635
- [3] *T.W. MULLIKIN*. Chandrasehkar's X and Y equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 113 (1964) p. 316-332.
- [4] *C. FOX*. A solution of Chandrasehkar's integral equation. *Trans. Amer. Math. Soc.* 99 (1961) p. 285-291.
- [5] *E. HILLE*, *J.D. TAMARKIN*. On the absolute integrability of Fourier Transforms. *Fund. Math.* 25 (1935). p. 329-352.
- [6] *T. CARLEMAN*. Sur la résolution de certaines équations intégrales. *Arkiv. for. Mat. Ast. och. Fysik.* 16 (1922) p. 1-19.
- [7] *M. RIESZ*. Sur les fonctions conjuguées. *Math. Zeit.* 27 (1928) p. 218-244.
- [8] *F.G. TRICOMI*. Equazioni integrali singolari del tipo di Carleman. *Annali di Mat.* (4) 39 (1955) p. 229-244.
- [9] *J.A. SHOHAT*, *J.D. TAMARKIN*. The problem of moments. *Math. Surveys Amer. Math. Soc.* (1943).
- [10] *E.C. TITCHMARSH*. Introduction to the theory of Fourier Integrals. Clarendon Press ; Oxford (1948).
- [11] *G.H. HARDY*, *A.E. INGHAM*, *G. POLYA*. Theorems concerning mean values of analytic functions. *Proc. Roy. Soc. Lond.* (A). 113, (1927) p. 542-569.

- [12] M.M. CRUM. On an integral equation of Chandrasehkar. Quart. J. Math. (Oxford 1) 16 (1947) p. 244.
- [13] N.I. MUSKHELISHVILI. Singular integral equations. Noordhoff Groningen- Holland (1953).
- [14] I.W. BUSBRIDGE . On solutions of Chandrasehkar's integral equation Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) p. 112-117
- [15] F.G. TRICOMI. On the finite Hilbert transformation Quart. J. Math. Oxford (2) , 2 (1951) p. 199-211.
- [16] L.H. LOOMIS The converse of the Fatou theorem for positive harmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc 53 (1943) p. 239-250.
- [17] R.C. YOUNG, S. FOLLARD On the integral $\int_a^b \frac{dF(x)}{x-t}$ Proc. Lond. Math. Soc. 28 (1928) p. 295-300.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

" Introduction à l'étude de la forme bi-confluente de l'équation de Heun, "

Vu et approuvé :

Paris, le . . . 4 Juillet . . . 19 67

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MARC. ZAMANSKY

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie
de Paris,

Jean ROCHE

